

MIKROSKOPISCHE BESCHREIBUNG
VON ELEKTROMAGNETISCHEN
ÜBERGÄNGEN UND
PHOTONUKLEAREN REAKTIONEN

vorgelegt von
Thomas Mertelmeier
aus Nürnberg

*Das
Erlangen.*

1985 № 295

MIKROSKOPISCHE BESCHREIBUNG VON ELEKTROMAGNETISCHEN ÜBERGÄNGEN UND PHOTONUKLEAREN REAKTIONEN

**Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades**

**vorgelegt von
Thomas Mertelmeier
aus Nürnberg**

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fakultäten der Universität Erlangen - Nürnberg.

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Mai 1985

Vorsitzender der Promotions-
kommission:

Prof. Dr. K. Brodersen

Erstberichterstatte:

Prof. Dr. H. M. Hofmann

Zweitberichterstatte:

Prof. Dr. C. Toepffer

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Zusammenfassung	3
1. Einleitung	5
2. Das elektromagnetische Feld	8
2.1 Klassische Beschreibung des elektromagnetischen Feldes	8
2.2 Quantenmechanische Beschreibung des elektromagnetischen Feldes	10
2.3 Multipolentwicklung des elektromagnetischen Feldes	11
2.4 Langwellennäherung	13
3. Der Hamiltonoperator	15
3.1 Der Wechselwirkungsoperator	15
3.2 Konsequenzen der Translationsinvarianz	18
3.3 Multipolentwicklung des Wechselwirkungsoperators in Langwellennäherung	20
3.4 Das Siegert-Theorem	22
4. Die Observablen	26
4.1 Übergänge zwischen gebundenen Kernzuständen	27
4.2 Strahlungseinfangreaktionen	31
4.3 Die elektrische Polarisierbarkeit von Atomkernen	35
4.4 Größenordnungen und Einheiten	39
5. Das Clustermodell der Atomkerne	41
5.1 Das Clustermodell	41
5.2 Die Refined-Resonating-Group-Methode	42
5.3 Die analytische Berechnung der Matrixelemente am Beispiel der Norm	48
6. Die analytische Berechnung der Matrixelemente der elektromagnetischen Multipoloperatoren	52
6.1 Aufspaltung der Matrixelemente in reduzierte Ortsraum- und Spinmatrixelemente	52
6.2 Die reduzierten Ortsmatrixelemente	55
6.3 Die Matrixelemente der Polarisierbarkeit	57

7. Ergebnisse und Folgerungen	60
7.1 Statische Multipolmomente und elektromagnetische Übergänge	62
7.1.1 Der Atomkern ${}^6\text{Li}$	62
7.1.2 Die Kerne ${}^7\text{Li}$ und ${}^7\text{Be}$	64
7.2 Die Strahlungseinfangreaktion $\alpha ({}^3\text{He}, \gamma) {}^7\text{Be}$	69
7.3 Die Polarisierbarkeit von ${}^7\text{Li}$	90
8. Schlußbemerkung und Ausblick	97
Anhänge:	
1. Multipolentwicklung des elektromagnetischen Feldes	99
2. Winkelverteilung	103
3. Die Flußnormierung der Streufunktion	105
4. Die Multipoloperatoren als sphärische Tensoroperatoren	107
5. Aufspaltung der Matrixelemente in reduziertes Spin- und reduziertes Ortsmatrixelement für die einzelnen Operatoren	109
6. Die analytische Berechnung der Ortsraummatrixelemente	114
7. Jacobikoordinaten	123
8. Die Parameter der Wellenfunktionen	126
9. Die Struktur der Programmketten	133
10. Tests der Programme	136
11. Kurzbeschreibung des Inputs	138
Literaturverzeichnis	144

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird im Rahmen des Clustermodells die sog. Refined-Resonating-Group-Methode erweitert, um elektromagnetische Eigenschaften und photonukleare Prozesse bei leichten Kernen beschreiben zu können.

Dazu werden die Matrixelemente der elektromagnetischen Übergangsoperatoren beliebiger Multipolarität in der Langwellennäherung analytisch angegeben, wobei diese Integrale mit Hilfe der erzeugenden Funktionen der Kugelfunktionen und quadratischer Ergänzung berechnet werden. Diese Methode ist auf Einteilchenoperatoren anwendbar, die aus Monom, Gaußfunktionen, Differentialoperator und Kugelflächenfunktion bestehen.

Als Anwendung gelingt es, die elektromagnetischen Momente und Übergänge zwischen gebundenen Zuständen der Kerne ${}^6\text{Li}$ und ${}^7\text{Li}$ gut wiederzugeben. Desweiteren wird die Strahlungseinfangreaktion ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ bei kleinen Energien untersucht. Um den astrophysikalischen S-Faktor im Einklang mit den experimentellen Daten zu beschreiben ist entscheidend, daß die Wellenfunktion des gebundenen Zustands von ${}^7\text{Be}$ das richtige asymptotische Verhalten einer Whittakerfunktion und die richtige Bindungsenergie relativ zur Schwelle besitzt. Bei der hier verwendeten Methode wird ersteres durch die Verwendung genügend vieler Gaußfunktionen für die Relativwellenfunktion von ${}^7\text{Be}$ erreicht, letzteres durch die Beimischung einer ${}^6\text{Li} + p$ -Struktur zur einfachen $\alpha - {}^3\text{He}$ -Zerlegung. Die Streufunktion muß im Wechselwirkungsbereich, d. h. auch für große Werte der Relativkoordinate, gut genug durch quadratintegrale Funktionen approximiert werden; außerdem muß sie die richtige Streuphase haben. Der Einfluß geschlossener Kanäle der Struktur ${}^6\text{Li} + p$ im Wechselwirkungsbereich scheint unterhalb von 2 MeV vernachlässigbar zu sein, speziell wird der S-Faktor bei der Energie Null dadurch nicht kleiner. Angesichts der vielen neuen und unabhängigen Messungen und der existierenden mikroskopischen Rechnungen (einschließlich dieser Arbeit) trägt die genaue Bestimmung des astrophysikalischen S-Faktors nicht zur Lösung des solaren Neutrinoproblems bei, vielmehr wird der bisher angenommene Wert bestätigt.

Als weitere Anwendung berechnen wir die elektrische Polarisierbarkeit von ${}^7\text{Li}$, die bei der Subcoulombstreuung an schweren Ionen aus der experimentellen Analyse gewonnen wird. Verschiedene Modellvorstellungen führen zu verschiedenen Ergebnissen, die teilweise im Widerspruch zum Experiment stehen. Insbesondere zeigt eine Kontinuumsberechnung der Polarisierbarkeit mit einer Einkanalstreuungsfunktion, daß der Hauptbeitrag von wenigen MeV über der Schwelle durch den virtuellen Aufbruch kommt. Die dadurch verursachte Polarisierbarkeit ist kleiner als der aus der experimentellen Analyse stammende Wert.

1. EINLEITUNG

In der vorliegenden Arbeit werden mit einer mikroskopischen Methode elektromagnetische Übergänge und Matrixelemente für photonukleare Reaktionen bei leichten Kernen und für niedrige Energien berechnet. Speziell interessieren wir uns für die Kerne Lithium und Beryllium und für die Strahlungseinfangsreaktion ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$. Es gibt mehrere Motivationen für dieses Vorhaben, die im folgenden erläutert werden.

Es existiert das solare Neutrinoproblem (Ba 82a), nämlich die Tatsache, daß auf der Erde erheblich weniger elektronische Sonnenneutrinos, die hauptsächlich vom ${}^8\text{B}$ -Zerfall stammen, nachgewiesen werden als Standardsonnenmodelle voraussagen. Eine Schlüsselrolle für die Zahl der produzierten Neutrinos spielt dabei die Reaktionsrate des Strahlungseinfangs ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$. Bei den winzigen Energien (≈ 50 keV), die den Verhältnissen auf der Sonne entsprechen, sind im Labor keine Messungen möglich. Man ist deshalb auf Rechnungen angewiesen.

Weiterhin können in jüngster Zeit genaue Experimente zur Streuung von polarisierten leichten Kernen an schweren Kernen unterhalb der Coulombbarriere durchgeführt werden (Eg 80). Die Abweichung vom Rutherford-Querschnitt ermöglicht dabei die Bestimmung des elektrischen Quadrupolmoments und der Übergangsstärke in angeregte Zustände. Dies bedeutet eine direkte Messung des Quadrupolmoments. Es ist aber auch möglich, die Polarisierbarkeit dieser leichten Kerne im Coulombfeld des Targets aus der Analyse dieser Experimente zu gewinnen.

Das Clustermodell, das der vorliegenden Arbeit zugrunde liegt, sollte besonders geeignet sein, diese Fragen zu behandeln. Außerdem sollte es prädestiniert sein, photonukleare Reaktionen zwischen zwei komplexen Kernen zu beschreiben. Aus Photoreaktionen wiederum können z. B. Aussagen über D-Zustandsbeimischungen in Alphateilchen (We 84b) durch Interferenzeffekte gewonnen werden oder auch fundamentale Symmetrien (Ca 83) getestet werden.

Generell sind mikroskopische Rechnungen mit vollständig antisymmetrisierten Wellenfunktionen notwendig, um die Qualität bestimmter Näherungen einschätzen zu können. Wann kann z. B. das Pauliprinzip vernachlässigt werden, wann kommt man mit den asymptotischen Wellenfunktionen aus?

Desweiteren stellt sich die Frage, ob die hier verwendete auf Hackenbroich (Ha 77) zurückgehende sog. Refined-Resonating-Group-Methode überhaupt in der Lage ist - wegen des Ansatzes für die Wellenfunktionen -, elektromagnetische Prozesse richtig zu beschreiben. Der einzige Versuch in dieser Richtung geht auf Stöwe (St 74) zurück, wurde aber nicht weiterverfolgt.

Bei der Berechnung der Matrixelemente der elektromagnetischen Wechselwirkungsoperatoren werden die Wellenfunktionen im Wechselwirkungsbereich getestet, der aber bisher nicht betrachtet wurde. Man beschränkte sich bisher, abgesehen von Bindungsenergien, auf die Berechnung der Streumatrix. Hier wird nun zum ersten Mal die Wellenfunktion im Bereich der elektromagnetischen Wechselwirkung untersucht und nach Qualitätskriterien gefragt.

Eine weitere technische Frage war, wie sich die Methode der analytischen Berechnung der Matrixelemente auf Einteilchenoperatoren anwenden läßt. Für Operatoren vom Typ "Monom · Gaußfunktion · Differentialoperator · Kugelflächenfunktion" wird dies in dieser Arbeit durchgeführt.

Ziel dieser Untersuchung ist aber nicht der Gewinn genauester Ergebnisse, sondern vielmehr die Methode zur Verfügung zu stellen, die prinzipielle Durchführbarkeit des Vorhabens und die Eignung des verwendeten Modells hierfür zu zeigen. Nichtsdestoweniger gelingt es aber, die experimentellen Daten zu beschreiben.

Die Reihenfolge der Darstellung ist die folgende:

In Kapitel 2 wird das elektromagnetische Feld multipolentwickelt. In Kapitel 3 werden die Wechselwirkungsoperatoren in erster Ordnung Störungstheorie und in der Langwellennäherung hergeleitet und kurz auf das Siegert-Theorem eingegangen. Die Observablen stellen wir in Kapitel 4 vor. In Kapitel 5 gehen wir auf das verwendete Clustermodell der Atomkerne ein, beschreiben den Ansatz für die Wellenfunktionen und skizzieren die Berechnung der Normmatrixelemente.

Damit sind alle Voraussetzungen gegeben, um in Kapitel 6 die Matrixelemente der elektromagnetischen Multipoloperatoren zu berechnen. In Kapitel 7 schließlich werden die Ergebnisse der Rechnungen gezeigt und gewisse Folgerungen gezogen.

Technische Details befinden sich in den Anhängen 1 bis 8, auf die an entsprechender Stelle im Text verwiesen wird. Anhang 9 erläutert die Struktur der verwendeten Programmketten. Wie die Programme getestet wurden, kann in Anhang 10 gelesen werden. Anhang 11 enthält eine Kurzbeschreibung des Inputs für den in die Hackenbroich-Programmkette eingeweihten Leser.

Ein mit dem elektromagnetischen Feld und seiner Multipolentwicklung vertrauter Leser kann Kap. 2 und 3 überspringen unter Beachtung, daß die zu verwendenden Operatoren (3.18 b - d) und (3.23) sind. Leser, welche die Refined-Resonating-Group-Methode kennen, können Kap. 5 bis auf die Normierung der Streufunktionen (Gl. (5.12) und (5.14)) auslassen.

Es bleibt noch zu bemerken, daß alle Gleichungen für eine beliebige Teilchenzahl A und beliebig viele Cluster formuliert sind, alle Programme jedoch nur für zwei und drei Cluster verwendet wurden. Aus Rechenzeitgründen werden heutzutage auf mittleren Großcomputern auch nicht mehr als zwölf Teilchen behandelt werden können.

2. DAS ELEKTROMAGNETISCHE FELD

2.1 Klassische Beschreibung des elektromagnetischen Feldes

Die von den Maxwellgleichungen beschriebenen klassischen elektrischen und magnetischen Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$ lassen sich durch das skalare Potential φ und das Vektorpotential $\underline{A}$ ausdrücken (La 77):

$$\underline{B} = \text{rot } \underline{A} \quad , \quad (2.1)$$

$$\underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{A} - \text{grad } \varphi \quad .$$

Mit der Coulomb- oder Strahlungsgleichung

$$\text{div } \underline{A} = 0 \quad (2.2)$$

und bei Abwesenheit von Quellen des elektromagnetischen Feldes mit

$$\varphi = 0 \quad (2.3)$$

erhält man aus den Maxwellgleichungen die Wellengleichung für das Vektorpotential $\underline{A}$:

$$\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{A} = 0 \quad . \quad (2.4)$$

Die Lösungen von (2.4) sind Überlagerungen von ebenen Wellen und können reell gewählt werden:

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \sum_{\underline{k}, \mu} \underline{e}_{\underline{k}, \mu} \left(C_{\underline{k}, \mu} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega_k t)} + C_{\underline{k}, \mu}^* e^{-i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega_k t)} \right) \quad . \quad (2.5)$$

In (2.5) sind die $C_{\underline{k}, \mu}$ und $C_{\underline{k}, \mu}^*$ die Überlagerungskoeffizienten, $\underline{k}$ ist der Wellenzahlvektor und gibt die Ausbreitungsrichtung an. Der Zusammenhang mit der Frequenz ω_k ist:

$$\omega_k = c |\underline{k}| = c k \quad . \quad (2.6)$$

Die Einheitsvektoren $\underline{e}_{\underline{k}, \mu}$ beschreiben die Polarisation der Welle. Aus $\text{div } \underline{A} = 0$ folgt

$$\underline{k} \cdot \underline{e}_{\underline{k},\mu} = 0. \quad (2.7)$$

D. h. $\underline{e}_{\underline{k},\mu}$ steht immer senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung $\underline{k}$. Man wählt diese Einheitsvektoren so, daß $\underline{e}_{\underline{k},1}$, $\underline{e}_{\underline{k},2}$ und $\underline{k}$ ein rechtwinkliges Dreibein bilden.

Für die Feldenergie

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi} \int_V (E^2 + B^2) dV \quad (2.8)$$

erhält man aus (2.5) mit (2.1):

$$\mathcal{H} = \frac{V}{2\pi c^2} \sum_{\underline{k},\mu} \omega_k^2 C_{\underline{k},\mu} C_{\underline{k},\mu}^* \quad (2.9)$$

wobei V das vom Feld eingenommene Volumen ist. Bildet man aus den Überlagerungskoeffizienten $C_{\underline{k},\mu}$ und $C_{\underline{k},\mu}^*$ die Linearkombinationen:

$$q_{\underline{k},\mu} := \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} (C_{\underline{k},\mu} e^{-i\omega_k t} + C_{\underline{k},\mu}^* e^{i\omega_k t}) \quad (2.10a)$$

$$p_{\underline{k},\mu} := \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}} i \omega_k (-C_{\underline{k},\mu} e^{-i\omega_k t} + C_{\underline{k},\mu}^* e^{i\omega_k t}) \quad (2.10b)$$

so läßt sich $\mathcal{H}$ durch $q_{\underline{k},\mu}$ und $p_{\underline{k},\mu}$ ausdrücken:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\underline{k},\mu} (p_{\underline{k},\mu}^2 + \omega_k^2 q_{\underline{k},\mu}^2) \quad (2.11)$$

$q_{\underline{k},\mu}$ und $p_{\underline{k},\mu}$ erfüllen die Hamilton-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{\underline{k},\mu}} = -\dot{p}_{\underline{k},\mu} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\underline{k},\mu}} = \dot{q}_{\underline{k},\mu} \quad (2.12)$$

Deshalb ist die Gesamtenergie $\mathcal{H}$ des Strahlungsfeldes die Hamiltonfunktion des Feldes. Wie man aus Gl. (2.11) erkennt, entspricht das Strahlungsfeld einer Summe über ungekoppelte eindimensionale harmonische Oszillatoren. Jeder dieser Oszillatoren hat als Lösung eine monochromatische ebene Welle der Frequenz ω_k mit Ausbreitungsrichtung $\underline{k}$ und Polarisation $\underline{e}_{\underline{k},\mu}$.

2.2 Quantenmechanische Beschreibung des elektromagnetischen Feldes

Bei der Beschreibung von Phänomenen im atomaren und nuklearen Bereich muß zur Quantenmechanik übergegangen werden. Dies geschieht, indem man aus $p_{\underline{k}\mu}$ und $q_{\underline{k}\mu}$ Operatoren macht mit den kanonischen Vertauschungsrelationen:

$$[p_{\underline{k}\mu}, q_{\underline{k}'\mu'}] = i\hbar \delta_{\underline{k},\underline{k}'} \delta_{\mu,\mu'} \quad (2.13)$$

$$[p_{\underline{k}\mu}, p_{\underline{k}'\mu'}] = 0 = [q_{\underline{k}\mu}, q_{\underline{k}'\mu'}]$$

Definiert man Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$b_{\underline{k}\mu}^+ := -\frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (p_{\underline{k}\mu} + i\omega_k q_{\underline{k}\mu}) \quad (2.14a)$$

$$b_{\underline{k}\mu} := \frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (p_{\underline{k}\mu} - i\omega_k q_{\underline{k}\mu}) \quad (2.14b)$$

so erhält man für den normalgeordneten Hamiltonoperator des elektromagnetischen Feldes:

$$H_{\text{rad}} = \sum_{\underline{k},\mu} \hbar\omega_k b_{\underline{k}\mu}^+ b_{\underline{k}\mu} \quad (2.15)$$

Für den Operator des Vektorpotentials ergibt sich:

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \sum_{\underline{k},\mu} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}} \underline{e}_{\underline{k}\mu} (b_{\underline{k}\mu} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} + b_{\underline{k}\mu}^+ e^{-i\underline{k}\cdot\underline{r}})$$

2.3 Multipolentwicklung des elektromagnetischen Feldes

Da Atom- und Kernzustände als Eigenfunktionen zu J^2 und J_z angegeben werden (J ist der Gesamtdrehimpuls), ist es zweckmäßig, beim Strahlungsfeld von den kartesischen Einheitsvektoren $\underline{e}_{kx}$ und $\underline{e}_{ky}$ zu sphärischen Einheitsvektoren (Ed 60) überzugehen:

$$\underline{e}_{+1} := -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\underline{e}_{kx} + i \underline{e}_{ky} \right) \quad (2.16)$$

$$\underline{e}_{-1} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\underline{e}_{kx} - i \underline{e}_{ky} \right)$$

Man erhält mit

$$b_{k,+1} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-b_{k,x} + i b_{k,y} \right) \quad (2.17)$$

$$b_{k,-1} := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(b_{k,x} + i b_{k,y} \right)$$

für das Vektorpotential

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \sum_{k, \mu=\pm 1} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{V \omega_k}} \left(b_{k\mu} \underline{e}_{\mu} e^{i \underline{k} \underline{r}} + b_{k\mu}^+ \underline{e}_{\mu}^* e^{-i \underline{k} \underline{r}} \right) \quad (2.18)$$

Weiterhin wird die ebene Welle $\underline{e}_{\mu} e^{i \underline{k} \underline{r}}$, die sich zunächst in Richtung der z-Achse ausbreiten möge, nach Multipolen entwickelt (Anhang 1 (A.2)):

$$\underline{e}_{\mu} e^{i \underline{k} \underline{r}} = \sum_{L=1}^{\infty} \left\{ -i^L \sqrt{2\pi(2L+1)} \mu j_L(kr) Y_{L\mu} + i^{L+1} \sqrt{2\pi L} j_{L+1}(kr) Y_{L+1\mu} + i^{L+1} \sqrt{2\pi(L+1)} j_{L-1}(kr) Y_{L-1\mu} \right\}, \quad (2.19)$$

$$\mu = \pm 1$$

Dabei bedeuten j_l die sphärischen Besselfunktionen und Y_{JLM} Vektorkugelfunktionen (Ed 60). In Gl. (2.19) ist bereits die Aufspaltung in sogenannte elektrische und magnetische Anteile vorhanden. Der erste Summand in der geschweiften Klammer heißt magnetisch, die beiden anderen elektrisch. Elektrische und magnetische Anteile unterscheiden sich durch ihr Verhalten bei Paritätstransformation. Speziell gilt:

$$\underline{r} \rightarrow -\underline{r} : Y_{L\ell M} \rightarrow (-1)^\ell Y_{L\ell M} . \quad (2.20)$$

Für konkrete Rechnungen ist es geeignet, die Vektorkugelfunktionen durch Differentialoperatoren und Kugelflächenfunktionen auszudrücken. Die hierfür notwendigen Umformungen werden in Anhang 1 zusammengestellt. Man erhält (A.4):

$$\underline{e}_\mu e^{ikz} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{L=1}^{\infty} \left\{ \mu i^L \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)}{L(L+1)}} \underline{L} (j_L(kr) Y_{L\mu}) + i^L \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)}{L(L+1)}} \frac{1}{k} \nabla \times \underline{L} (j_L(kr) Y_{L\mu}) \right\} . \quad (2.21)$$

Dabei sind $Y_{L\mu}$ Kugelflächenfunktionen und $\underline{L} = -i \underline{r} \times \nabla$ der Drehimpulsoperator.

Berücksichtigt man, daß die Ausbreitung der Welle nicht in z-Richtung verlaufen muß, so kann der allgemeine Fall durch Drehung des Koordinatensystems erreicht werden.

Da Gl. (2.19) bzw. (2.21) eine Entwicklung nach irreduziblen sphärischen Tensoroperatoren darstellt, deren Verhalten bei Drehungen wohlbekannt ist, erhält man:

$$\underline{e}'_\mu e^{ikr} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{LM} (\mu \underline{A}_{LM}^m + \underline{A}_{LM}^e) \mathcal{D}_{M\mu}^L \quad (2.22)$$

mit

$$\underline{A}_{LM}^m = i^L \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)}{L(L+1)}} \underline{L} (j_L(kr) Y_{L\mu}) \quad (2.23a)$$

und

$$\underline{A}_{LM}^e = i^L \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)}{L(L+1)}} \frac{1}{k} \underline{\nabla} \times \underline{L} (j_L(kr) \underline{Y}_{LM}) \quad (2.23b)$$

Die Drehmatrizen $\mathcal{D}_{M\mu}^L$ (Ed 60) sind die $(2L+1)$ -dimensionalen Matrizen der irreduziblen Darstellung der Drehgruppe. Die sphärischen Einheitsvektoren $\underline{e}'_{+1}$ und $\underline{e}'_{-1}$ sind so definiert, daß $\underline{e}'_0 = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$. $\underline{e}'_{+1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ beschreibt eine rechtszirkularpolarisierte, $\underline{e}'_{-1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ eine linkszirkularpolarisierte Welle. Linearpolarisierte Wellen erhält man nach (2.16) als Überlagerung der zirkularpolarisierten.

Die Multipolentwicklung der ebenen Welle und die Aufspaltung in elektrischen und magnetischen Anteil ist der Charakterisierung der Kernzustände durch Gesamtdrehimpuls und Parität (d. h. J^π) angemessen.

2.4 Langwellennäherung

Wir betrachten nun den Fall, daß die Wellenlänge der Strahlung sehr viel größer ist als die typische Ausdehnung der mit der Strahlung wechselwirkenden Objekte:

$$\frac{r}{\lambda} = kr \ll 1.$$

Für elektromagnetische Übergänge in Atomkernen und photonukleare Reaktionen bedeutet dies, daß als typische Länge r der Kernradius $1.4 A^{1/3}$ fm (B1 52) angenommen werden kann:

$$kr = \frac{\hbar \omega_k}{\hbar c} \cdot 1.4 A^{1/3} \text{ fm} \approx \hbar \omega_k \frac{1.4}{200} A^{1/3} \frac{1}{\text{MeV}} \ll 1$$

oder

$$\hbar \omega_k \ll 140 A^{-1/3} \text{ MeV}.$$

Für $A = 2$ bedeutet dies: $\hbar \omega_k \ll 110 \text{ MeV}$,

für $A = 12$: $\hbar \omega_k \ll 61 \text{ MeV}$.

Diese Bedingung ist in den heutzutage möglichen mikroskopischen Resonating-Group-Rechnungen für leichte Kerne immer gut erfüllt.

Verwendet man das Verhalten der sphärischen Besselfunktionen für $kr \rightarrow 0$
(Ab 65)

$$j_L(kr) \underset{kr \rightarrow 0}{\approx} \frac{(kr)^L}{(2L+1)!!}, \quad (2.24)$$

so erhält man in Langwellennäherung (Anhang 1 (A.9))

$$\begin{aligned} \underline{e}_\mu' e^{i\vec{k} \cdot \underline{r}} = & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{LM} \left\{ \mu \frac{i(k)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)}{L(L+1)}} \nabla(r^L Y_{LM}) \times \underline{r} \right. \\ & \left. + \frac{i}{k} \frac{(ik)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)(L+1)}{L}} \nabla(r^L Y_{LM}) \right\} \mathcal{D}_{M\mu}^L. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Damit ist das elektromagnetische Feld sowohl ohne (2.22) als auch mit Langwellennäherung (2.25) nach elektrischen und magnetischen Multipolen zerlegt.

3. DER HAMILTONOPERATOR

3.1 Der Wechselwirkungsoperator

Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems, welches aus Photonen und Nukleonen besteht, enthält den Nukleonenhamiltonoperator H_{nuc1} , den Hamiltonoperator der elektromagnetischen Strahlung H_{rad} (2.15) und den Wechselwirkungsoperator H_{int} zwischen Nukleonen und Strahlung:

$$H = H_{\text{nuc1}} + H_{\text{rad}} + H_{\text{int}} \quad (3.1)$$

Der Hamiltonian von A Nukleonen bestehe aus der kinetischen Energie T und einer Zweiteilchenwechselwirkung V

$$H_{\text{nuc1}} = T + V = \sum_{i=1}^A \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i < j} V_{ij} \quad (3.2)$$

Die Eigenfunktionen zu H_{nuc1} sollen $|\lambda\rangle$ heißen:

$$H_{\text{nuc1}} |\lambda\rangle = \epsilon_\lambda |\lambda\rangle \quad (3.3)$$

Wenn $|n_{\underline{k}\mu}\rangle$ ein Zustand mit $n_{\underline{k}\mu}$ Photonen mit Wellenzahlvektor $\underline{k}$ und Polarisation μ ist, gilt:

$$H_{\text{rad}} \prod_{\underline{k}\mu} |n_{\underline{k}\mu}\rangle = \left(\sum_{\underline{k}'\mu'} \hbar \omega_{\underline{k}'} n_{\underline{k}'\mu'} \right) \prod_{\underline{k}\mu} |n_{\underline{k}\mu}\rangle$$

Den Wechselwirkungsoperator erhält man aus H_{nuc1} durch minimale Substitution ($p_i \rightarrow p_i - \frac{q}{c} \underline{A}$) und Addition des Pauliterms $-\underline{\mu} \cdot \underline{B}$, welcher die Wechselwirkung zwischen Magnetfeld $\underline{B}$ und Spin der Nukleonen beschreibt, wobei $\underline{\mu}$ das magnetische Moment des Atomkerns ist

$$\underline{\mu} = \sum_{i=1}^A \frac{e}{2mc} g_{s,i} \underline{S}_i \quad (3.4)$$

Hier ist $\underline{s}_i$ der Spin des i-ten Nukleons ($\underline{s}_i = \frac{\hbar}{2} \underline{\sigma}_i$, $\underline{\sigma}_i$ Vektor der Pauli-matrizen), $g_{s,i}$ ist der Spin-g-Faktor des i-ten Nukleons

($g_{s, \text{Proton}} = 5.586$, $g_{s, \text{Neutron}} = -3.826$).

Da das magnetische Moment $\underline{\mu}$ als Vektor gekennzeichnet ist, sind Verwechslungen mit der Polarisationsrichtung $\mu = \pm 1$ des Photons ausgeschlossen.

Man erhält also:

$$H_{\text{nucel}} + H_{\text{int}} = \sum_{i=1}^A \frac{(\underline{p}_i - \frac{g_i}{2} \underline{A}(\underline{r}_i))^2}{2m} + \sum_{i < j} V_{ij} - \underline{\mu} \cdot \underline{B} \quad (3.5)$$

Hier wurde die Geschwindigkeitsabhängigkeit von V_{ij} , etwa wegen einer Spinbahnkraft, und der Austauschcharakter des Kernpotentials vernachlässigt.

Mit der Strahlungseichung $\text{div } \underline{A} = 0$ (Gl. 2.2) erhält man

$$H_{\text{int}} = \sum_{i=1}^A \left(- \frac{e g_{e,i}}{mc} \underline{A}(\underline{r}_i) \cdot \underline{p}_i + \frac{e^2 g_{e,i}^2}{2mc^2} \underline{A}^2(\underline{r}_i) - \frac{e}{2mc} g_{s,i} \underline{s}_i \cdot \underline{B}(\underline{r}_i) \right) \quad (3.6)$$

Es wurde die Ladung q_i des i-ten Nukleons durch die Elementarladung e und den Bahn-g-Faktor g_{1i} ausgedrückt ($g_{1, \text{Proton}} = 1$, $g_{1, \text{Neutron}} = 0$).

Da die elektromagnetische Wechselwirkung viel schwächer ist als die starke Wechselwirkung, kann man H_{int} als Störung zu H_{nucel} auffassen. H_{int} kann als nach Potenzen der Kopplungskonstante e bzw. des Feldes $\underline{A}$ entwickelter Ausdruck aufgefaßt werden. Beschränkt man sich wegen der kleinen Störung auf Störungstheorie 1. Ordnung, so ist der Term $\frac{e^2 g_{e,i}^2}{2mc^2} \underline{A}^2$ wegzulassen.

Wie wir gleich sehen werden, ist dies gleichbedeutend damit, nur 1-Photon-Übergänge zu betrachten. H_{int} lautet also in Störungstheorie 1. Ordnung:

$$H_{\text{int}} = - \frac{e}{mc} \left(\sum_{i=1}^A g_{e,i} \underline{A}(\underline{r}_i) \cdot \underline{p}_i + \frac{1}{2} g_{s,i} \underline{s}_i \cdot \underline{B}(\underline{r}_i) \right) \quad (3.7)$$

Mit (2.18) für $\underline{A}$ ergibt sich:

$$H_{\text{int}} = \sum_{\underline{k}, \mu} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{V \omega_k}} \left\{ H_a(\underline{k}, \underline{e}_\mu) b_{\underline{k}, \mu} + H_a^\dagger(\underline{k}, \underline{e}_\mu) b_{\underline{k}, \mu}^\dagger \right\} \quad (3.8)$$

mit

$$H_a(\underline{k}, \underline{e}_\mu) = -\frac{e}{mc} \sum_{i=1}^A \left(g_{\underline{k}, i} \underline{e}_\mu e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}_i} \underline{p}_i + \frac{1}{2} g_{\underline{k}, i} \underline{s}_i \cdot \nabla \times \underline{e}_\mu e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}_i} \right) \quad (3.9)$$

$H_a(\underline{k}, \underline{e}_\mu)$ ist ein Operator, der nur auf Nukleonenfreiheitsgrade wirkt, und beschreibt aufgrund des Vernichtungsoperators $b_{\underline{k}\mu}$ die Absorption eines Photons mit Wellenzahlvektor $\underline{k}$ und Polarisationsvektor $\underline{e}_\mu$. $H_a^\dagger(\underline{k}, \underline{e}_\mu)$ beschreibt die Emission eines solchen Photons.

H_{int} (Gl. 3.8) macht also nur Übergänge zwischen Zuständen, die sich um genau ein Photon unterscheiden. Betrachten wir die Absorption eines Photons, d. h. den Übergang zwischen den Zuständen $|\lambda_i, (\underline{k}, \underline{e}_\mu)\rangle$ und $|\lambda_f\rangle$ (λ_i und λ_f bezeichnen die Kernzustände im Sinne von (3.3)), so gilt:

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_f | H_{int} | \lambda_i, (\underline{k}, \underline{e}_\mu) \rangle \\ &= \langle \lambda_f | \sum_{\underline{k}'\mu'} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\underline{k}}}} \left\{ H_a(\underline{k}', \underline{e}_{\mu'}) b_{\underline{k}'\mu'} + H_a^\dagger(\underline{k}', \underline{e}_{\mu'}) b_{\underline{k}'\mu'}^\dagger \right\} | \lambda_i, (\underline{k}, \underline{e}_\mu) \rangle \\ &= \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\underline{k}}}} \langle \lambda_f | H_a(\underline{k}, \underline{e}_\mu) | \lambda_i \rangle \end{aligned} \quad (3.10)$$

Für die Emission eines Photons erhält man analog:

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_f, (\underline{k}, \underline{e}_\mu) | H_{int} | \lambda_i \rangle \\ &= \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\underline{k}}}} \langle \lambda_f | H_a^\dagger(\underline{k}, \underline{e}_\mu) | \lambda_i \rangle \\ &= \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_{\underline{k}}}} \langle \lambda_i | H_a(\underline{k}, \underline{e}_\mu) | \lambda_f \rangle^* \end{aligned} \quad (3.11)$$

Für die interessierenden Observablen, wie z. B. Übergangswahrscheinlichkeiten oder Winkelverteilungen, welche bilineare Ausdrücke in den Übergangsmatrixelementen sind, genügt es also, Kernmatrixelemente des Operators H_a zu berechnen. Hierbei ist zu beachten, daß für Photonabsorption der Anfangszustand λ_i im Matrixelement rechts zu stehen hat.

3.2 Konsequenzen der Translationsinvarianz

Im Wechselwirkungsoperator (Gl. 3.9) kommen beliebige Einteilchenkoordinaten $\underline{r}_i$ vor. Da man sich nur für interne Anregungen des Kerns, nicht aber für Anregungen auf der Koordinate des Schwerpunktes interessiert, ist es angebracht, auf innere Koordinaten $\tilde{\underline{r}}_i$ überzugehen.

$$\tilde{\underline{r}}_i = \underline{r}_i - \underline{R}_{CM}$$

$$\tilde{\underline{p}}_i = \underline{p}_i - \frac{1}{A} \underline{P}_{CM}$$

$\underline{R}_{CM}$ und $\underline{P}_{CM}$ sind Ort und Impuls des Schwerpunktes der A Nukleonen. Dies ist insbesondere der Translationsinvarianz der Resonating-Group-Methode zur Beschreibung des A-Nukleonensystems angemessen. Der Wechselwirkungsoperator (3.9) läßt sich damit schreiben als:

$$\begin{aligned} H_a(\underline{k}, \underline{e}_\mu) &= - \frac{e}{mc} \sum_{j=1}^A \left\{ g_{kj} \underline{e}_\mu e^{i \underline{k} \cdot \tilde{\underline{r}}_j} \tilde{\underline{p}}_j + \frac{1}{2} g_{kj} \underline{s}_j \cdot \underline{\nabla}_j \times \underline{e}_\mu e^{i \underline{k} \cdot \tilde{\underline{r}}_j} \right\} e^{i \underline{k} \cdot \underline{R}_{CM}} \\ &\quad - \frac{e}{mc} \cdot \frac{1}{A} \sum_{j=1}^A g_{kj} \underline{e}_\mu e^{i \underline{k} \cdot \tilde{\underline{r}}_j} e^{i \underline{k} \cdot \underline{R}_{CM}} \cdot \underline{P}_{CM} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Matrixelemente des zweiten Terms von (3.12) verschwinden wegen der Transversalität des elektromagnetischen Feldes. Zerlegt man nämlich die Kernwellenfunktionen in interne Wellenfunktion und ebene Wellen für die Schwerpunktsbewegung:

$$\begin{aligned} |\lambda_i\rangle &= \varphi_i e^{i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_{CM}} (2\pi)^{-3/2} \\ |\lambda_f\rangle &= \varphi_f e^{i\mathbf{K}_f \cdot \mathbf{R}_{CM}} (2\pi)^{-3/2}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

so erhält man für das Matrixelement des zweiten Terms von (3.12)

$$\begin{aligned} \langle \lambda_f | -\frac{e}{mcA} \sum_{j=1}^A g_{\mathbf{k}_j} \mathbf{e}_\mu e^{i\mathbf{k}_j \cdot \tilde{\mathbf{r}}_j} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{CM}} \mathbf{p}_{-CM} | \lambda_i \rangle \\ = -\frac{e}{mcA} \langle \varphi_f | \sum_{j=1}^A g_{\mathbf{k}_j} e^{i\mathbf{k}_j \cdot \tilde{\mathbf{r}}_j} | \varphi_i \rangle_{\text{int}} \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{K}_i \\ \cdot \left\langle e^{i\mathbf{K}_f \cdot \mathbf{R}_{CM}} \left| e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{CM}} e^{i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_{CM}} \right\rangle_{CM} \right. (2\pi)^{-3} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$\langle \dots \rangle_{\text{int}}$ (bzw. $\langle \dots \rangle_{CM}$) bedeutet Integration über die internen Koordinaten (bzw. Schwerpunktskoordinate). Im Schwerpunktsystem ist bei Photonabsorption $\mathbf{K}_f = 0$ und wegen des Faktors

$$\langle e^{i\mathbf{K}_f \cdot \mathbf{R}_{CM}} | e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{CM}} e^{i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_{CM}} \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f) (2\pi)^3$$

gilt: $\mathbf{K}_i = -\mathbf{k}$

Deshalb verschwindet (3.14) wegen der Transversalität $\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{k} = 0$ des elektromagnetischen Feldes (Gl. 2.7).

Matrixelemente des 1. Terms von (3.12) geben wegen des Faktors

$$(2\pi)^{-3} \langle e^{i\mathbf{K}_f \cdot \mathbf{R}_{CM}} | e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_{CM}} e^{i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_{CM}} \rangle = \delta(\mathbf{k} + \mathbf{K}_i - \mathbf{K}_f)$$

die Erhaltung des Gesamtimpulses.

Mit translationsinvarianten internen Wellenfunktionen φ_i bzw. φ_f , z. B. Clusterwellenfunktionen (s. Kap. 5), genügt es also, die Matrixelemente des Anteils von H_a zu berechnen, der nur von den internen Koordinaten abhängt:

$$\tilde{H}_a(\underline{k}, \underline{e}_\mu) := -\frac{e}{mc} \sum_{j=1}^A \left(g_j \underline{e}_\mu e^{i \underline{k} \cdot \tilde{\underline{r}}_j} \tilde{\underline{p}}_j + \frac{1}{2} g_j \underline{S}_j \cdot \nabla_j \times \underline{e}_\mu e^{i \underline{k} \cdot \tilde{\underline{r}}_j} \right) \quad (3.15)$$

Es gilt also:

$$\langle \lambda_f | H_a | \lambda_i \rangle = \delta(\underline{k} + \underline{k}_i - \underline{k}_f) \langle \varphi_f | \tilde{H}_a | \varphi_i \rangle \quad (3.16)$$

Im folgenden befassen wir uns nur noch mit $\tilde{H}_a$ und Matrixelementen zwischen translationsinvarianten Wellenfunktionen.

3.3 Multipolentwicklung des Wechselwirkungsoperators in Langwellennäherung

Setzt man die Ausdrücke (2.22) und (2.23) für die Multipolentwicklung der ebenen Welle in den Wechselwirkungsoperator $\tilde{H}_a(\underline{k}, \underline{e}_\mu)$ (Gl. 3.15) ein, so erhält man die Multipolentwicklung dieses Operators. Da wir aber ausschließlich an der Langwellennäherung interessiert sind, verwenden wir gleich die Langwellennäherung für die ebene Welle (Gl. 2.25) und für den vom Magnetfeld stammenden Term $\nabla \times \underline{e}_\mu e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}}$ (Anhang 1, (A.10)) und erhalten aus Gl. (3.15):

$$\begin{aligned} \tilde{H}_a(\underline{k}, \underline{e}'_\mu) &= \\ &= - \sum_{LM} \frac{(ik)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{\frac{2\pi (2L+1)(L+1)}{L}} \\ &\cdot \left\{ \sigma(\varepsilon, LM) + \sigma'(\varepsilon, LM) - i\mu \sigma(\mu, LM) - i\mu \sigma'(\mu, LM) \right\} \\ &\cdot \mathcal{Q}_{LM}^L \end{aligned} \quad (3.17)$$

mit

$$O(\mathcal{E}, LM) = - \sum_{j=1}^A 2g_{\mathcal{E}j} \frac{e}{2mc} \frac{i}{k} \nabla (\tilde{r}_j^L Y_{LM}(\hat{\tilde{r}}_j)) \cdot \tilde{p}_j \quad (3.18a)$$

$$O'(\mathcal{E}, LM) = - \sum_{j=1}^A g_{\mathcal{E}j} \frac{e}{2mc} \frac{k}{L+1} L (\tilde{r}_j^L Y_{LM}(\hat{\tilde{r}}_j)) \cdot \underline{s}_j \quad (3.18b)$$

$$O(\mathcal{M}, LM) = \sum_{j=1}^A 2g_{\mathcal{M}j} \frac{e}{2mc} \frac{1}{L+1} \nabla (\tilde{r}_j^L Y_{LM}(\hat{\tilde{r}}_j)) \cdot \tilde{\underline{x}}_j \quad (3.18c)$$

$$O'(\mathcal{M}, LM) = \sum_{j=1}^A g_{\mathcal{M}j} \frac{e}{2mc} \nabla (\tilde{r}_j^L Y_{LM}(\hat{\tilde{r}}_j)) \cdot \underline{s}_j \quad (3.18d)$$

Die Operatoren (3.18) heißen die Multipoloperatoren. $O(\mathcal{E}, LM)$ ist der elektrische Bahnoperator, $O'(\mathcal{E}, LM)$ der elektrische Spinoperator, $O(\mathcal{M}, LM)$ der magnetische Bahnoperator und $O'(\mathcal{M}, LM)$ der magnetische Spinoperator.

3.4 Das Siegert-Theorem

Fordert man explizit die Eichinvarianz des Wechselwirkungsoperators, so erhält man den elektrischen Bahnoperator, ohne geschwindigkeitsabhängige Kräfte und Austauschpotentiale in H_{nuc1} zu vernachlässigen.

Sachs und Austern (Sa 51) lieferten die aus der Eichinvarianz folgenden Bedingungen für den Wechselwirkungsoperator in beliebiger Ordnung der Kopplungskonstante. In erster Ordnung, die wir hier ausschließlich betrachten, lautet diese Bedingung: Wenn $\tilde{H}_a(k, \underline{e}_\mu')$ vom Gradienten einer skalaren Funktion $G(\tilde{r}_j)$ abhängt (Schreibweise $\tilde{H}_a(\nabla G(\tilde{r}_j))$ statt $\tilde{H}_a(k, \underline{e}_\mu')$), dann gilt:

$$\tilde{H}_a(\nabla G(\tilde{r}_j)) = [g, H'] \quad (3.19)$$

mit

$$g = \frac{i}{\hbar c} \sum_{j=1}^A e g_{ej} G(\tilde{r}_j)$$

und

$$H' = H_{nuc1} - T_{CM}$$

Da $\tilde{H}_a$ der auf die Nukleonenfreiheitsgrade wirkende Wechselwirkungsoperator ist und vom elektromagnetischen Feld $\underline{A}(\underline{r}_j)$ und damit von $\underline{e}_\mu' e^{ik\underline{r}}$ abhängt, erkennt man in Langwellennäherung anhand der Gleichung (2.25), daß

$$G(\tilde{r}_j) = -\frac{i}{k} \sum_{LM} \left\{ \frac{(ik)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{\frac{2\pi(2L+1)(L+1)}{L}} \tilde{r}_j^L Y_{LM}(\hat{\tilde{r}}_j) \right\} \mathcal{D}_{M\mu}^L \quad (3.20)$$

Durch Vergleich mit (3.17) hinsichtlich der Vorfaktoren ist dann der elektrische Bahnoperator nach (3.19) gegeben durch:

$$C(E, LM) = \frac{1}{\hbar c k} \left[H', \sum_{j=1}^A e g_{ej} \tilde{r}_j^L Y_{LM}(\hat{\tilde{r}}_j) \right] \quad (3.21)$$

Bezeichnen wir mit φ wieder die Eigenzustände von H' , so kann man Matrixelemente von $O(E, LM)$ leicht ausrechnen:

$$\langle \varphi_f | O(\epsilon, LM) | \varphi_i \rangle = \sum_{j=1}^A g_{\epsilon j} \frac{e}{\hbar c k} (E_f - E_i) \langle \varphi_f | \tilde{r}_j^L Y_{LM} | \varphi_i \rangle.$$

Mit $\hbar \omega_k = \hbar c k = E_f - E_i$ erhält man

$$\langle \varphi_f | O(\epsilon, LM) | \varphi_i \rangle = \langle \varphi_f | \sum_{j=1}^A e g_{\epsilon j} \tilde{r}_j^L Y_{LM}(\hat{\tilde{r}}_j) | \varphi_i \rangle. \quad (3.22)$$

Die Aussage des Siegert-Theorems ist, daß in Langwellennäherung der elektrische Bahnoperator gegeben ist durch

$$O_{ST}(\epsilon, LM) = \sum_{j=1}^A e g_{\epsilon j} \tilde{r}_j^L Y_{LM}(\hat{\tilde{r}}_j). \quad (3.23)$$

An dieser Stelle sind folgende Bemerkungen angebracht:

- a) Den Operator $O_{ST}(\epsilon, LM)$ erhält man auch aus dem Operator $O(\epsilon, LM)$ (Gl. 3.18a), wenn man wiederum geschwindigkeitsabhängige Potentiale und Austausch effekte in H_{nuc1} vernachlässigt. Dann gilt nämlich

$$\nabla(\tilde{r}_j^L Y_{LM}(\hat{\tilde{r}}_j)) \cdot \tilde{\mathbf{p}}_j = \frac{i m}{\hbar} [H', \tilde{r}_j^L Y_{LM}(\hat{\tilde{r}}_j)] \quad (3.24)$$

was direkt auf Gl. (3.21) führt.

Offensichtlich sagt das Siegert-Theorem aus, daß sich die Fehler, die man macht, wenn man geschwindigkeitsabhängige Potentiale und Austausch effekte sowohl bei der minimalen Substitution in Gl. (3.5) und bei Gl. (3.24) vernachlässigt, gegenseitig kompensieren.

- b) Den Operator $\tilde{H}_a(\mathbf{k}, \mathbf{e}_\mu')$ erhält man auch, wenn man annimmt, der Wechselwirkungsoperator sei gegeben durch (B1 52, Fo 53)

$$H_{int} = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3r \quad (3.25)$$

$\underline{j}$ ist die nukleare Stromdichte und besteht aus einem Konvektions- und einem Spinanteil, die unter der Annahme punktförmiger Nukleonen folgendermaßen angesetzt werden (Fo 53):

$$\underline{j}(\underline{r}) = \sum_{j=1}^A \frac{e}{2m} \left\{ g_{1j} \left(\delta(\underline{r}-\underline{\tilde{r}}_j) \underline{\tilde{p}}_j + \underline{\tilde{p}}_j \delta(\underline{r}-\underline{\tilde{r}}_j) \right) + g_{sj} \underline{\nabla} \times \underline{\tilde{s}}_j \delta(\underline{r}-\underline{\tilde{r}}_j) \right\} \quad (3.26)$$

Bei diesem Zugang steckt die Näherung, oder härter ausgedrückt, der Fehler im Ansatz für die Stromdichte $\underline{j}$, welche wegen der vorhandenen Mesonaustauschströme eigentlich unbekannt ist.

In Langwellennäherung erhält man das Siegert-Theorem durch Benutzung der Kontinuitätsgleichung

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{j}(\underline{r}) + \frac{i}{\hbar} [H', \varrho(\underline{r})] = 0 \quad (3.27)$$

Dies ist der Forderung nach Eichinvarianz äquivalent (Fo 53). Damit erhält man für den elektrischen Bahnoperator:

$$\Theta(\epsilon, LM) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int [H', \varrho] r^L Y_{LM}(\hat{r}) d^3r \quad (3.28)$$

Mit der punktförmigen Nukleonenverteilung:

$$\varrho(\underline{r}) = \sum_{j=1}^A e g_{ej} \delta(\underline{r}-\underline{\tilde{r}}_j) \quad (3.29)$$

erhält man für die Matrixelemente

$$\langle \varphi_f | \Theta(\epsilon, LM) | \varphi_i \rangle = \langle \varphi_f | \sum_{j=1}^A e g_{ej} \underline{\tilde{r}}_j^L Y_{LM}(\hat{\underline{\tilde{r}}}_j) | \varphi_i \rangle, \quad (3.22)$$

also das bekannte Resultat.

- c) $\Theta_{ST}(\epsilon, LM)$ ist gerade der Operator der elektrischen Multipolmomente der Ordnung 2^L . Die elektrischen Multipolmomente hängen daher nicht explizit von Details der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung ab (z. B. von Mesonaustauscheffekten). Dies kann folgendermaßen plausibel gemacht werden: Die elektrischen Momente, z. B. $\int \underline{r} \varrho(\underline{r}) d^3r$, hängen nur von der Ladungs-

dichte $\underline{g}$ ab, die magnetischen Momente jedoch, z. B. $\frac{1}{2c} \int \underline{r} \times \underline{j}(\underline{r}) d^3r$, hängen von $\underline{g}$ und $\underline{j}$ ab. Denn im einfachsten Fall gilt $\underline{j} = \underline{g} \dot{\underline{r}} = \frac{1}{4} \underline{g} [H, \underline{r}]$. Der Strom ist also explizit vom Hamiltonian abhängig.

d) Durch Ersetzen der Stromdichte $\underline{j}$ durch die Ladungsdichte $\underline{g}$ mittels Kontinuitätsgleichung ist in $O_{ST}(\underline{E}, LM)$ der Hauptanteil der Mesonaustauschströme enthalten (Gi 83). Dies wurde von Arenhövel durch explizite Rechnungen im Zweinukleonensystem gezeigt (Ar 81). Schon Siegert (Si 37) zeigte, daß man keineswegs Austauscheffekte vernachlässigt, und schätzte die Abweichungen von der Größenordnung $\frac{v}{c}$ ab.

e) Bei der Benutzung des Operators $O_{ST}(\underline{E}, LM)$ ist zu beachten, daß bei dessen Herleitung immer ein Kommutator mit dem nuklearen Hamiltonoperator auszuwerten ist. Man braucht dazu exakte Eigenfunktionen. Dies ist aber in den meisten realistischen Rechnungen nicht der Fall, da die Wellenfunktionen in einem begrenzten Modellraum gegeben sind.

f) Für die magnetischen Operatoren ist kein Siegert-Theorem vorhanden, so daß hier Beiträge von Meson-Austauschströmen erwartet werden, die für die möglichen Diskrepanzen zwischen Rechnungen und experimentellen Daten verantwortlich gemacht werden können.

Wie in Abschnitt 4.4 gezeigt, ist im Grenzfall kleiner Photonenergien der Hauptbeitrag durch den elektrischen Bahnoperator zu erwarten. Für diesen sind aber die wichtigsten mesonischen Effekte durch das Siegert-Theorem berücksichtigt.

Die zu verwendenden elektromagnetischen Multipoloperatoren sind also der elektrische bzw. magnetische Bahnoperator (3.23) bzw. (3.18c) und der elektrische bzw. magnetische Spinoperator (3.18b) bzw. (3.18d). Im Rahmen dieser Arbeit werden Matrixelemente von diesen Operatoren berechnet, zu Vergleichszwecken jedoch auch vom Operator (3.18a), welcher das Siegert-Theorem nicht berücksichtigt.

4. DIE OBSERVABLEN

In diesem Kapitel werden die Observablen beschrieben, die im Rahmen dieser Arbeit berechnet werden. Bisher wurde das hier verwendete Kernmodell, die sog. Refined-Resonating-Group-Methode - sie wird im nächsten Kapitel erläutert -, nur dazu benutzt, Bindungsenergien und die Streumatrix für Kernreaktionen zu berechnen. Dabei ist man jedoch nur auf den wegen der Kurzreichweitigkeit der Kernkraft inneren Bereich der Wellenfunktion oder im Fall der S-Matrix auf den asymptotischen Bereich der Streufunktion empfindlich. In dieser Arbeit werden zum ersten Mal innerhalb des erwähnten Modells auch elektromagnetische Eigenschaften leichter Kerne berechnet. Die dafür relevanten Observablen hängen jedoch wegen der langreichweitigen Ortsabhängigkeit der Operatoren entscheidend von den äußeren Teilen der Wellenfunktion ab; insbesondere ist dies beim Strahlungseinfang bei kleinen Energien der Fall, wo die Wechselwirkung hauptsächlich zwischen 5 und 30 fm stattfindet, also zwischen dem inneren Bereich und der Asymptotik.

Da das Ziel eine konsistente Beschreibung aller Eigenschaften ist, bedeutet die Berechnung elektromagnetischer Größen eine weitere Überprüfung des verwendeten Modells, d. h. des Wellenfunktionsansatzes und des Nukleon-Nukleon-Potentials.

Zum anderen erwartet man, daß das Clustermodell wegen des Ansatzes der Wellenfunktion als Zweifragmentfunktion gerade zur Beschreibung des Strahlungseinfangs komplexer Kerne gut geeignet ist.

Dies möge als Motivation für die nun zu erläuternden Observablen genügen. In Abschnitt 4.1 betrachten wir den Übergang zwischen gebundenen Kernzuständen, in Abschnitt 4.2 Strahlungseinfangreaktionen und in 4.3 die elektrische Polarisierbarkeit von Atomkernen.

4.1 Übergänge zwischen gebundenen Kernzuständen und Multipolmomente

Wie in Abschnitt 3.1 erläutert wurde, wird die Wechselwirkung des Strahlungsfeldes mit den Nukleonen als kleine Störung des nuklearen Hamiltonoperators H_{nuc} (Gl. 3.2) aufgefaßt und Übergangswahrscheinlichkeiten in Störungstheorie 1. Ordnung berechnet. Die Übergangswahrscheinlichkeit $w_{i \rightarrow f}$ vom Anfangszustand i in den Endzustand f ist in dieser Näherung durch Fermi's goldene Regel (Me 61) gegeben:

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | H_{\text{int}} | i \rangle \right|^2 \rho_f(E) \quad (4.1)$$

mit dem Wechselwirkungshamiltonian H_{int} aus Gl. (3.7); $\rho_f(E)$ ist die Dichte der Endzustände.

Wir betrachten nun den Übergang zwischen gebundenen Kernzuständen durch die Emission eines Photons der Energie $E = \hbar \omega_k$ in den Raumwinkel Ω (Fig. 4.1). Ausgehend von Gl. (4.1) erhält man mit Hilfe von Gl. (3.11)

$$w_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \cdot \frac{2\pi \hbar c^2}{V \omega_k} \left| \langle \varphi_i | \tilde{H}_a(\underline{k}, \underline{e}'_\mu) | \varphi_f \rangle \right|^2 \rho_f(E), \quad (4.2)$$

wobei $\tilde{H}_a(\underline{k}, \underline{e}'_\mu)$ durch Gl. (3.17) gegeben ist und φ_i und φ_f die betrachteten Kernzustände sind. Die Zahl der Photonen dN , die mit Energie E bzw. Impuls $p = \hbar k$ in den Raumwinkel Ω emittiert werden, ist

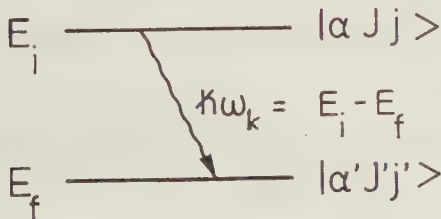


Fig. 4.1: Übergang zwischen den gebundenen Zuständen $|\alpha J j\rangle$ und $|\alpha' J' j'\rangle$ mit den Energien E_i und E_f .

$$dN = \frac{V p^2 dp d\Omega}{(2\pi \hbar)^3} \quad (4.3)$$

Mit Hilfe von $E = \hbar c k$ und $p = \hbar k$ erhält man daraus:

$$dN = \frac{V k^2}{(2\pi)^3 \hbar c} dE d\Omega$$

und damit die Dichte der Endzustände

$$\rho_f(E) = \frac{dN}{dE d\Omega} = \frac{V k^2}{(2\pi)^3 \hbar c} \quad (4.4)$$

Folglich ergibt sich für die Übergangswahrscheinlichkeit

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{k}{2\pi \hbar} \left| \langle \varphi_f | \tilde{H}_a(\underline{k}, \underline{e}'_\mu) | \varphi_i \rangle \right|^2 \quad (4.5)$$

Um die Übergangswahrscheinlichkeit $w_{\text{unpol}}(\underline{k}, \mu, \alpha J \rightarrow \alpha' J')$ eines Photons mit Impuls $\underline{k}$ und Polarisationsvektor $\underline{e}'_\mu$ zwischen unpolarisierten Kernzuständen zu erhalten, müssen wir noch über die magnetischen Quantenzahlen von Anfangs- bzw. Endzustand mitteln bzw. summieren. Der Anfangszustand sei nun mit $|\alpha J j\rangle$, der Endzustand mit $|\alpha' J' j'\rangle$ bezeichnet, mit J als Gesamtdrehimpuls und j als magnetischer Quantenzahl; α bezeichnet alle übrigen Quantenzahlen. Dann gilt:

$$w_{\text{unpol}}(\underline{k}, \mu, \alpha J \rightarrow \alpha' J') = \frac{k}{2\pi \hbar} \sum_{j,j'} \frac{1}{2J+1} \left| \langle \alpha J j | \tilde{H}_a(\underline{k}, \underline{e}'_\mu) | \alpha' J' j' \rangle \right|^2 \quad (4.6)$$

In Anhang 2 wird gezeigt, daß diese Winkelverteilung von folgender Form ist:

$$\begin{aligned} w_{\text{unpol}}(\underline{k}, \mu, \alpha J \rightarrow \alpha' J') &= \\ &= \frac{1}{\hbar} \frac{1}{(2J+1)^2} \sum_{N_{JJ'} L' M} (-1)^{M-\mu} \frac{i^L (-i)^{L'} k^{L+L'+1}}{(2L+1)!! (2L'+1)!!} \sqrt{\frac{(2L+1)(2L'+1)(L+1)(L'+1)}{L L'}} \\ &\cdot (LM L' - M | N) (L \mu L' - \mu | N) (J' j' LM | J j) (J' j' L' M | J j) \\ &\cdot \langle \alpha J || \sigma_L(\epsilon) - i\mu \sigma_L(\mu) || \alpha' J' \rangle \langle \alpha J || \sigma_L(\epsilon) - i\mu \sigma_L(\mu) || \alpha' J' \rangle^* \\ &\cdot P_N(\cos \theta_k) \end{aligned} \quad (4.7)$$

wobei P_N das N-te Legendre-Polynom ist und bei den Operatoren Bahn- und Spinanteil zusammengefaßt sind:

$$\sigma_{LM}(\epsilon, \mu) := \begin{cases} \sigma_{(sr)}(\epsilon, LM) + \sigma'(\epsilon, LM) \\ \sigma(\mu, LM) + \sigma'(\mu, LM) \end{cases}$$

Um die Übergangswahrscheinlichkeit $w_{\text{unpol}}(k, \alpha J \rightarrow \alpha' J')$ für die Emission eines Photons mit Energie $\hbar \omega_k = \hbar k c$ zwischen unpolarisierten Kernzuständen zu erhalten, muß weiterhin über die beiden Polarisationsrichtungen $\mu = \pm 1$ summiert werden und über den Raumwinkel von $\underline{k}$ integriert werden, wobei man berücksichtigt, daß

$$\int P_N(\cos \theta_k) d\Omega_k = 4\pi \delta_{N,0} \quad (4.8)$$

Aus

$$w_{\text{unpol}}(k, \alpha J \rightarrow \alpha' J') = \sum_{\mu=\pm 1} \int d\Omega_k w_{\text{unpol}}(\underline{k}, \mu, \alpha J \rightarrow \alpha' J') \quad (4.9)$$

erhält man somit

$$w_{\text{unpol}}(k, \alpha J \rightarrow \alpha' J') \quad (4.10) \\ = \frac{8\pi}{\hbar} \sum_L k^{2L+1} \frac{L+1}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{|\langle \alpha' J' || \sigma_L(\epsilon) || \alpha J \rangle|^2}{2J+1} + \frac{|\langle \alpha' J' || \sigma_L(\mu) || \alpha J \rangle|^2}{2J+1} \right)$$

Dies ist die sog. Weiskopf-Formel (Ro 67) für die Gammabreite dieses Zerfalls:

$$\Gamma_j(k, \alpha J \rightarrow \alpha' J') = \hbar w_{\text{unpol}}(k, \alpha J \rightarrow \alpha' J') \quad (4.11)$$

Mit Hilfe der reduzierten Übergangsstärken, die auch für den Übergang $\alpha J \rightarrow \alpha' J'$ durch Photonabsorption definiert sind,

$$B(\epsilon, L, \alpha J \rightarrow \alpha' J') := \frac{|\langle \alpha' J' || \sigma_L(\epsilon) || \alpha J \rangle|^2}{2J+1} \quad (4.12)$$

erhält man für Gl. (4.10)

$$w_{\text{unpol}}(k, \alpha J \rightarrow \alpha' J') \\ = \frac{8\pi}{\hbar} \sum_L k^{2L+1} \frac{L+1}{L[(2L+1)!!]^2} (B(\epsilon, L, \alpha J \rightarrow \alpha' J') + B(\mu, L, \alpha J \rightarrow \alpha' J')) \quad (4.13)$$

Da die Energie des Photons gleich der Energiedifferenz der beiden Kernzustände ist ($\hbar\omega = E_i - E_f$) und bei Kernstrukturrechnungen die Bindungsenergien (d. h. die Energieniveaus) oft ungenau bestimmt sind, werden bei konkreten Rechnungen meist nur die B-Werte (Gl. 4.12) angegeben. Diese enthalten die gesamte Information über die Kernstruktur und sind nicht so stark energieabhängig wie die Übergangswahrscheinlichkeiten, die den Faktor k^{2L+1} enthalten.

Bei der Angabe der B-Werte ist darauf zu achten, ob sie sich auf die Emission oder Absorption beziehen da sie im Nenner von (4.12) den Faktor $2J+1$ des Anfangszustandes enthalten.

Die statischen elektromagnetischen Multipolmomente sind durch die Erwartungswerte der Operatoren (3.18) und (3.23) gegeben.

Wegen

$$\nabla(r Y_{LM}(\hat{r})) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \underline{e}_M \quad (4.14)$$

gilt (3.18 c, d)

$$\mathcal{O}(\mu, 1M) + \mathcal{O}'(\mu, 1M) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{e}{2mc} \sum_{j=1}^A [g_{lj} (\underline{l}_j)_M + g_{sj} (\underline{s}_j)_M] \quad (4.15)$$

Deswegen ist das magnetische Dipolmoment μ im Zustand $|\alpha JJ\rangle$ gegeben durch

$$\mu := \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \langle \alpha JJ | \mathcal{O}(\mu, 10) + \mathcal{O}'(\mu, 10) | \alpha JJ \rangle \quad (4.16)$$

Als magnetisches Oktupolmoment definieren wir:

$$\Omega := \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \langle \alpha JJ | \mathcal{O}(\mu, 30) + \mathcal{O}'(\mu, 30) | \alpha JJ \rangle \quad (4.17)$$

Schließlich ist das elektrische Quadrupolmoment definiert als:

$$Q := \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle \alpha JJ | \mathcal{O}_{ST}(\epsilon, 20) | \alpha JJ \rangle \quad (4.18)$$

mit dem Operator $\mathcal{O}_{ST}(\epsilon, 20) = \sum_{j=1}^A e g_{lj} \hat{r}_j^2 Y_{20}(\hat{r}_j)$

aus Gl. (3.23).

4.2 Strahlungseinfangreaktionen

Wenn die bei der Fusion zweier Kerne mit den Massenzahlen A_1 und A_2 zum Kern mit der Massenzahl $A = A_1 + A_2$ freiwerdende Bindungsenergie und kinetische Energie der Relativbewegung durch Photonen abtransportiert wird, spricht man von einer Strahlungseinfangreaktion (radiative capture) (Fig. 4.2). Der Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch (Me 61, Bl 52)

$$\sigma_{i \rightarrow f} = \frac{w_{i \rightarrow f}}{j_i}, \quad (4.19)$$

wobei j_i der einlaufende Fluß ist.

Für die Emission eines Photons des Impulses $\underline{k}$ und der Polarisation $\underline{e}_\mu'$ ist die Übergangswahrscheinlichkeit durch Gl. (4.5) gegeben, wobei jedoch φ_i der Streuzustand im Eingangskanal ist.

Ist die einlaufende Welle auf den Fluß

$$j_i = \frac{\hbar K}{m} \quad (4.20)$$

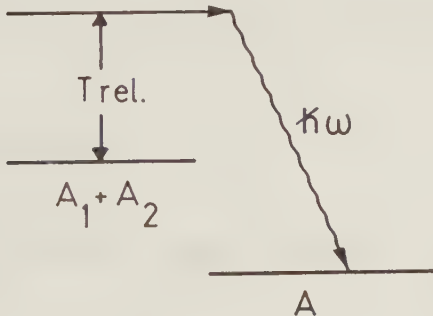


Fig. 4.2: Strahlungseinfang zweier Kerne mit Massenzahlen A_1 und A_2 und kinetischer Relativenergie T_{rel} mit Bildung des fusionierten Kerns der Massenzahl $A = A_1 + A_2$.

normiert, wobei $\underline{k}$ der Wellenzahlvektor im Eingangskanal und m die reduzierte Masse im Eingangskanal ist, $T_{\text{rel}} = \hbar^2 k^2 / 2m$, so erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{i \rightarrow f} = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{k}{K} \cdot |\langle \varphi_i | \tilde{H}_a(\underline{k}, \underline{e}'_\mu) | \varphi_f \rangle|^2 \quad (4.21)$$

Die Wellenfunktion im Eingangskanal ist durch den Kanalspin S_c und seine magnetische Quantenzahl M_{S_c} gekennzeichnet und wird nach Relativbahndrehimpulsen L_{rel} partialwellenzerlegt. Wie in Kapitel 5 gezeigt wird, läßt sich diese Wellenfunktion schreiben als:

$$|\varphi_i\rangle = |\alpha S_c M_{S_c}\rangle = \sum_{L_{\text{rel}} J_j} (L_{\text{rel}} 0 S_c M_{S_c} | J_j) |\varphi_{\alpha L_{\text{rel}} S_c J_j}\rangle \quad (4.22)$$

Der Clebsch-Gordan-Koeffizient $(L_{\text{rel}} 0 S_c M_{S_c} | J_j)$ gewährleistet, daß $|\alpha S_c M_{S_c}\rangle$ eine in z-Richtung einlaufende Coulombwelle mit der richtigen Flußnormierung (4.20) enthält.

Die genaue Gestalt der Funktion $|\varphi_{\alpha L_{\text{rel}} S_c J_j}\rangle$ wird in Kapitel 5 angegeben (Gl. (5.13)).

Der gebundene Endzustand sei wieder mit $|\alpha' J' j'\rangle$ bezeichnet. Durch Summieren bzw. Mitteln über die magnetischen Quantenzahlen des End- bzw. Anfangszustandes erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Fusion bei Emission eines Photons mit Impuls $\hbar \underline{k}$ und Polarisation $\underline{e}'_\mu$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mu, \underline{k}, \alpha S_c \rightarrow \alpha' J' j') = \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{k}{K} \sum_{J' M_{S_c}} \frac{1}{2S_c + 1} \cdot |\langle \alpha S_c M_{S_c} | \tilde{H}_a(\underline{k}, \underline{e}'_\mu) | \alpha' J' j' \rangle|^2 \quad (4.23)$$

Mit Hilfe von Gl. (4.22) und Anhang 2 bekommt man die Winkelverteilung:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mu, \underline{k}, \alpha S_c \rightarrow \alpha' J') = & \\
 = \frac{m}{\hbar^2} \frac{k}{K} \sum_{\substack{N j' M_{S_c} L_{rel} L_{rel}'' \\ J J'' L' M}} (-1)^{M-\mu} \frac{i^L (-i)^{L'}}{(2L+1)!! (2L'+1)!!} \sqrt{\frac{(2L+1)(2L'+1)(L+1)(L'+1)}{L L'}} \\
 & \cdot \frac{1}{(2S_c+1)\sqrt{(2J+1)(2J''+1)}} (L_{rel} 0 S_c M_{S_c} | J M_{S_c}) (L_{rel}'' 0 S_c M_{S_c} | J'' M_{S_c}) \\
 & \cdot (L M L' -M | N 0) (L_{\mu} L' -\mu | N 0) (J' j' L M | J M_{S_c}) (J' j' L' M | J'' M_{S_c}) \\
 & \cdot \langle \varphi_{\alpha L_{rel} S_c J} \| \sigma_L(\epsilon) - i\mu \sigma_L(\mu) \| \alpha' J' \rangle \langle \varphi_{\alpha L_{rel}'' S_c J''} \| \sigma_L'(\epsilon) - i\mu \sigma_L'(\mu) \| \alpha' J' \rangle^* \\
 & \cdot P_N(\cos \theta_k) \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

Für den unpolarisierten winkelintegrierten Wirkungsquerschnitt gilt analog Gl. (4.9)

$$\sigma(k, \alpha S_c \rightarrow \alpha' J') = \sum_{\mu=\pm 1} \int d\Omega_k \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mu, \underline{k}, \alpha S_c \rightarrow \alpha' J') \quad (4.25)$$

Verwendung von Gl. (4.8) und der Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten liefert

$$\begin{aligned}
 \sigma(k, \alpha S_c \rightarrow \alpha' J') = & \\
 = \frac{8\pi}{\hbar^2} \frac{m}{K} \sum_{L_{rel} J} \frac{L+1}{L[(2L+1)!!]^2} k^{2L+1} \frac{1}{(2S_c+1)(2L_{rel}+1)} \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

$$\cdot \left(|\langle \varphi_{\alpha L_{rel} S_c J} \| \sigma_L(\epsilon) \| \alpha' J' \rangle|^2 + |\langle \varphi_{\alpha L_{rel} S_c J} \| \sigma_L(\mu) \| \alpha' J' \rangle|^2 \right)$$

Als partiellen winkelintegrierten Wirkungsquerschnitt $\sigma(k, L, \alpha_{L_{rel}} S_c J \rightarrow \alpha' J')$ wollen wir einen Summand in (4.26) bezeichnen:

$$\sigma(k, L, \alpha_{L_{rel}} S_c J \rightarrow \alpha' J') = \frac{8\pi u}{k^2 K} \frac{L+1}{L[(2L+1)!!]^2} k^{2L+1} \frac{1}{(2S_c+1)(2L_{rel}+1)} \quad (4.27)$$

$$\cdot \left(|\langle \varphi_{\alpha_{L_{rel}} S_c J} \| \mathcal{O}_L(\varepsilon) \| \alpha' J' \rangle|^2 + |\langle \varphi_{\alpha_{L_{rel}} S_c J} \| \mathcal{O}_L(u) \| \alpha' J' \rangle|^2 \right),$$

so daß gilt:

$$\sigma(k, \alpha_{S_c} \rightarrow \alpha' J') = \sum_{L, L_{rel}, J} \sigma(k, L, \alpha_{L_{rel}} S_c J \rightarrow \alpha' J'). \quad (4.28)$$

Den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man, wenn man

$\sigma(k, \alpha_{S_c} \rightarrow \alpha' J')$ über alle möglichen Endzustände $\alpha' J'$ und über alle möglichen unpolarisierten Kanalspins gewichtet aufsummiert. (Mit J_1 und J_2 seien die Kernspins der beiden Fragmente bezeichnet.):

$$\sigma_{tot}(k) = \sum_{\alpha' J'} \sum_{\alpha_{S_c}} \frac{2S_c+1}{(2J_1+1)(2J_2+1)} \sigma(k, \alpha_{S_c} \rightarrow \alpha' J'). \quad (4.29)$$

Man sieht leicht ein, daß die Ergebnisse (4.26) und (4.29) mit denen aus den Ref. (Li 81), (Ba 83) übereinstimmen.

Photospaltquerschnitte erhält man aus den Strahlungseinfangquerschnitten durch das Prinzip des detaillierten Gleichgewichts.

In der Astrophysik ist man meist am Fusionswirkungsquerschnitt bei sehr kleinen Energien interessiert. In diesem Bereich wird der Wirkungsquerschnitt hauptsächlich vom langreichweitigen Coulombpotential bestimmt und ist zur Tunnelwahrscheinlichkeit $\exp(-2\pi Z_1 Z_2 e^2 / \hbar v)$ durch den Coulombwall, genannt Penetrabilität, proportional ($v = \frac{\hbar K}{m}$ ist die Relativgeschwindigkeit im Eingangskanal). Zum anderen enthält der Wirkungsquerschnitt den kinematischen Faktor $1/K^2 = \hbar^2 / 2mE$.

Sowohl dieser kinematische Faktor als auch die Penetrabilität sind bei kleinen Energien sehr stark energieabhängig. Deshalb definiert man den

astrophysikalischen S-Faktor (C1 68):

$$S(E) = \sigma_{\text{tot}}(E) \cdot E \cdot \exp\left(\frac{2\pi z_1 z_2 e^2}{\hbar v}\right), \quad (4.30)$$

wobei $\sigma_{\text{tot}}(E)$ der Wirkungsquerschnitt (4.29) ist. Der Photonenimpuls k ist hier durch die Energie im Eingangskanal E ersetzt.

$S(E)$ ist nur noch schwach energieabhängig und enthält nur noch die kernphysikalische Information und keine Coulombabhängigkeiten mehr.

4.3 Die elektrische Polarisierbarkeit von Atomkernen

Die Subcoulombstreuung leichter Kerne (${}^6\text{Li}$, ${}^7\text{Li}$) an schweren Kernen (${}^{58}\text{Ni}$, ${}^{120}\text{Sn}$) wird im wesentlichen nur von der elektromagnetischen Wechselwirkung beeinflusst und nicht von den kurzreichweitigen Kernkräften; die theoretische Beschreibung erfolgt mit der Theorie der Coulombanregung (A1 75). Verwendet man polarisierte, d. h. ausgerichtete, leichte Kerne (Eg 80, We 84a, We 85), so zeigt die semiklassische Behandlung, daß die Abweichung vom Rutherford-Streuquerschnitt im Falle des Projektils ${}^7\text{Li}$ vom Quadrupolmoment (Grundzustands-Reorientierungseffekt), und vom $B(E2, 3/2^- \rightarrow 1/2^-)$ -Wert (reelle E2-Anregung) dominiert wird. Dies stellt eine direkte Messung des Quadrupolmoments dar; das Ergebnis ist also nicht wie im Fall von Hyperfeinaufspaltungsexperimenten vom berechneten elektrischen Feldgradienten der Elektronenhülle abhängig.

Aus diesen Subcoulombstreuexperimenten können aber auch als Effekt höherer Ordnung die Polarisierbarkeit des Projektils im Coulombfeld des Targets bestimmt werden. Im Falle von ${}^7\text{Li}$ wird diese Polarisierbarkeit von virtuellen Dipolanregungen in höherliegende Kontinuumszustände ($|n\rangle$, Energien E_n) beherrscht, welche z. B. auch die Zustände einer eventuell vorhandenen Dipolriesenresonanz sein können. Diese Effekte sind in Fig. 4.3 veranschaulicht.

Mit den in dieser Arbeit entwickelten Methoden kann die Polarisierbarkeit für verschiedene Modellvorstellungen berechnet werden.

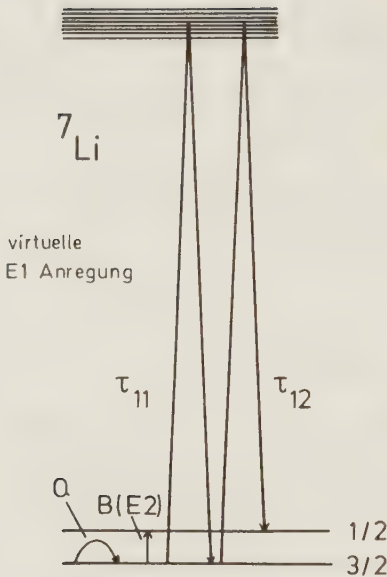


Fig. 4.3:
Veranschaulichung des Grundzustandsreorientierungseffekts (Q), der reellen E2-Anregung (B(E2)) und der Polarisierbarkeit durch virtuelle E1-Anregung (τ_{11} , τ_{12}).

Die virtuellen Dipolanregungen werden störungstheoretisch durch ein effektives Polarisierungspotential (A1 75, We 84 a) beschrieben, bestehend aus Skalar- und Tensoranteil. Der skalare Anteil ist proportional zur sog. Polarisierbarkeit

$$\alpha = \frac{8\pi}{9} \sum_n \frac{B(E1, i \rightarrow n)}{E_n - E_i} \quad (4.31)$$

Der Tensoranteil ist proportional zur Größe (Hä 73, A1 75)

$$S_{i \rightarrow f}(E1) = \sum_n (-1)^{-J_i - J_f} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ J_f & J_i & J_n \end{matrix} \right\} \frac{\langle J_i || \mathcal{O}_{ST}(E1) || J_n \rangle \langle J_n || \mathcal{O}_{ST}(E1) || J_f \rangle}{E_n - E_i}$$

Für Rotations- und Vibrationskerne kann mit klassischen Überlegungen gezeigt werden (A1 75), daß der Tensoranteil proportional ist zu $\alpha \cdot \alpha_{20}^{i \rightarrow f}$, wobei der Deformationsparameter $\alpha_{20}^{i \rightarrow f}$ durch das reduzierte E2-Matrixelement

und den mittleren Kernradius $R_0 = r_0 A^{1/3}$ ($r_0 \approx 1.2 \dots 1.4$ fm) ausgedrückt wird:

$$\alpha_{20}^{i \rightarrow f} = \frac{4\pi}{3 Z e R_0^2} \langle J_i \| O_{ST}(\epsilon_2) \| J_f \rangle \quad (4.33)$$

Um einen Vergleich der beiden Ausdrücke für den Tensoranteil zu ermöglichen, betrachten wir die sog. Tensorstärke $\tau_{i \rightarrow f}$ der Polarisierbarkeit (We 84 a, We 85):

$$\tau_{i \rightarrow f} = \tau_{i \rightarrow f}(S_{i \rightarrow f}(\epsilon_1)) = \frac{8\pi}{9} \sqrt{\frac{10}{3}} S_{i \rightarrow f}(\epsilon_1) \quad (4.34a)$$

bzw.

$$\tau_{i \rightarrow f} = \tau_{i \rightarrow f}(\alpha) = \sqrt{\frac{5}{9\pi}} \alpha \cdot \alpha_{20}^{i \rightarrow f} \quad (4.34b)$$

Da es sich bei den Zwischenzuständen $|n\rangle$ in Gl. (4.31) und Gl. (4.32) um ungebundene Zustände, d. h. Streuzustände handelt, müssen die in der Literatur vorkommenden Ausdrücke durch folgende ersetzt werden (Sm 72):

$$S_{i \rightarrow f}(\epsilon_1) = \quad (4.35a)$$

$$= (-1)^{-J_i - J_f} \sum_{\lambda} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ J_f & J_i & \lambda \end{Bmatrix} \int dE \frac{\langle J_i \| O_{ST}(\epsilon_1) \| \lambda E J_{\lambda} \rangle \langle \lambda E J_{\lambda} \| O_{ST}(\epsilon_1) \| J_f \rangle}{E - E_i}$$

bzw.

$$\alpha = \frac{8\pi}{9} \sum_{\lambda} \int dE \frac{|\langle \lambda E J_{\lambda} \| O_{ST}(\epsilon_1) \| J_i \rangle|^2}{(E - E_i)(2J_i + 1)} \quad (4.35b)$$

Hierbei ist $|\lambda E J_{\lambda}\rangle$ die auf δ -Funktion in der Energie normierte Streufunktion. Integriert wird ab der Schwellenenergie des jeweiligen Kanals λ .

Üblicherweise wird die aufwendige Rechnung unter Verwendung von Streufunktionen vermieden und die vereinfachende Annahme gemacht (Ba 82a), daß die gesamte E1-Stärke in einem relativ engen Energiebereich konzentriert ist, d. h. daß näherungsweise alle Zwischenzustände bei der Energie E_D entartet sind ("Closure Approximation"). Unter Benutzung der Vollständigkeit der Zwischenzustände erhält man dann die Ausdrücke:

$$S_{i \rightarrow f}(E1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{E_D} \langle J_i || T(2) || J_f \rangle \quad (4.36a)$$

und

$$\alpha = - \frac{8\pi \sqrt{3}}{9 E_D (2J_i + 1)} \langle J_i || T(0) || J_i \rangle \quad (4.36b)$$

mit dem Zweiteilchenoperator T:

$$\begin{aligned} T(kq) &:= \sum_m (1m \ 1q-m | kq) \hat{O}_{ST}(E, 1m) \hat{O}_{ST}(E, 1q-m) \\ &= \sum_{i i'} e^2 q_{Ei} q_{Ei'} \sum_m (1m \ 1q-m | kq) \tilde{r}_i^{\dagger} Y_{1m}(\hat{r}_i^{\dagger}) \tilde{r}_{i'} Y_{1q-m}(\hat{r}_{i'}) . \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die Ergebnisse der Gleichungen (4.35) und (4.36) werden in Kapitel 7.3 miteinander verglichen.

Auch für die Polarisierbarkeit müssen also je nach verwendeter Modellvorstellung entweder Matrixelemente zwischen gebundenen Zuständen oder Matrixelemente zwischen einem gebundenen Zustand und einem Streuzustand berechnet werden.

4.4 Größenordnungen und Einheiten

Um ein Gefühl für die Größenordnungen und den relativen Beitrag der einzelnen Multipoloperatoren zu bekommen, machen wir eine einfache Abschätzung, indem wir einen Kern mit Z Protonen, A Nukleonen und Radius R betrachten.

Matrixelemente der Operatoren (3.23), (3.18b), (3.18c) und (3.18d) sind dann von folgender Größenordnung:

$$\langle O_{ST}(E, LH) \rangle \approx Ze R^L$$

$$\langle O'(E, LH) \rangle \approx A e \frac{k}{mc} \frac{1}{L+1} R^L \cdot \hbar \approx A e \frac{\hbar \omega_k}{mc^2} R^L$$

$$\langle O(M, LH) \rangle \approx Ze \frac{1}{mc} \frac{1}{L+1} R^{L+1} \hbar \approx Ze \frac{\hbar c}{mc^2} R^{L+1}$$

$$\langle O'(M, LH) \rangle \approx A e \frac{1}{mc} R^{L+1} \cdot \hbar \approx A e \frac{\hbar c}{mc^2} R^{L+1}$$

Berücksichtigt man, daß bei unseren Anwendungen $\hbar \omega_k < 10$ MeV gilt und daß $\hbar c \approx 200$ MeV·fm, $mc^2 \approx 1000$ MeV und $1 \text{ fm} \leq R \leq 5 \text{ fm}$, so erhält man

$$\frac{\langle O_{ST}(E, LH) \rangle}{\langle O'(E, LH) \rangle} \approx \frac{Z}{A} \frac{mc^2}{\hbar \omega_k} \approx 10^2,$$

$$\frac{\langle O_{ST}(E, LH) \rangle}{\langle O(M, LH) \rangle} \approx \frac{\langle O_{ST}(E, LH) \rangle}{\langle O'(M, LH) \rangle} \approx R \frac{mc^2}{\hbar c} \gtrsim 5$$

und

$$\frac{\langle O'(E, LH) \rangle}{\langle O(M, LH) \rangle} \approx \frac{\langle O'(E, LH) \rangle}{\langle O'(M, LH) \rangle} \approx R \frac{\hbar \omega_k}{\hbar c} \lesssim 0.25$$

D. h. der elektrische Bahnoperator liefert den größten Beitrag. Berücksichtigt man, daß die Übergangswahrscheinlichkeit proportional zum Quadrat der Matrixelemente ist, so sind bei gleicher Multipolarität elektrische Übergänge ca. 10 bis 100 mal stärker als magnetische. Der elektrische Spinoperator muß nur berücksichtigt werden, wenn der Bahnoperator Null liefert.

Bei Übergängen zwischen gebundenen Zuständen haben die Matrixelemente der Operatoren $O(\cdot, LM)$ die Einheit $e \text{ fm}^L$, da die Wellenfunktionen auf $1/\sqrt{\text{Volumen}}$ normiert sind.

Folglich haben die reduzierten Übergangsstärken die Einheit $e^2 \text{ fm}^{2L}$. Die B-Werte für magnetische Übergänge werden allerdings auch häufig in der Einheit $\mu_k^2 \text{ fm}^{2L-2}$ angegeben, wobei μ_k

$$\mu_k = \frac{e\hbar}{2m_p c^2} \quad (4.38)$$

das Kernmagneton ist (m_p ist die Protonenmasse).

Das magnetische Dipolmoment wird natürlich in Einheiten von μ_k angegeben, das magnetische Oktupolmoment in $\mu_k \cdot \text{fm}^2$. Das elektrische Quadrupolmoment hat die Einheit $e \text{ fm}^2 = 10 \text{ e mb}$.

Bei Übergängen zwischen gebundenen Zuständen und Streuzuständen haben die Matrixelemente der Operatoren $O(\cdot, LM)$ wegen der angegebenen Flußnormierung von $|\varphi_{\alpha l m} S_c J_j\rangle$ die Einheit $e \text{ fm}^{L+3/2}$, so daß der winkelintegrierte Wirkungsquerschnitt die Einheit $\text{fm}^2 = 10^{-2} \text{ b}$ hat.

Aus (4.31) bis (4.36) ist ersichtlich, daß α , $S(\infty)$ und τ die Einheit $e^2 \cdot \text{fm}^2 / \text{MeV}$ haben. Wegen $e^2 / \hbar c \approx 1/137$ und $[\hbar c] = \text{MeV fm}$ ist dies gleichbedeutend mit fm^3 . Die Polarisierbarkeit hat also, wie es sein muß, die Einheit eines Volumens.

5. DAS CLUSTERMODELL DER ATOMKERNE

Hier soll nicht der Versuch gemacht werden, das Clustermodell der Kerne oder deren unterschiedliche Realisierungsmethoden zu beschreiben. Eine ausführliche Darstellung kann z. B. in den Ref. (Wi 77) und (Ta 81) gefunden werden. An dieser Stelle werden nur die wichtigsten Grundzüge der Resonating-Group-Methode (RGM) geschildert; insbesondere wird auf die Berechnung der Matrixelemente mit der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Methode eingegangen. Eine ausführliche Darstellung dieser auf Hackenbroich (Ha 70, He 70, Ha 73) zurückgehenden sog. Refined-Resonating-Group-Methode (RRGM) ist Ref. (Ho 84 b).

5.1 Das Clustermodell

Da die exakte Lösung der Schrödingergleichung mit einem realistischen Hamiltonoperator für das Vielkuleonensystem nicht möglich ist, muß man eine approximative Lösung suchen. Eine solche näherungsweise Lösung in einem eingeschränkten Modellraum ist die Resonating-Group-Methode. Dabei läßt man sich von der Vorstellung leiten, daß wegen des anziehenden Teils der Kernkraft die Nukleonen sich zwar gerne nahe beieinander aufhalten, wegen des Pauliprinzipis aber nur Teilchen mit verschiedenen Spin- und Isospinquantenzahlen räumlich nahe beieinander sein dürfen. Es bilden sich also bevorzugt Clusterkorrelationen aus vier oder weniger Teilchen, was auch durch die hohe Bindungsenergie des α -Teilchens unterstrichen wird. Deswegen wählt man als Modellraum Clusterwellenfunktionen.

Die folgenden Eigenschaften der RGM seien hier besonders erwähnt:

- a) Das Pauliprinzip wird durch die Verwendung von vollständig antisymmetrischen Wellenfunktionen berücksichtigt.
- b) Durch die Verwendung eines translationsinvarianten Hamiltonoperators wird die Bewegung des Schwerpunktes korrekt beschrieben, was insbesondere bei leichten Kernen wichtig ist.

- c) Die RGM ist ein mikroskopisches Modell, das von einem realistischen Nukleon-Nukleon-Potential ausgeht, welches die Streu- und Bindungsdaten für das Zweinukleonensystem wiedergibt. Je nach Aufwand werden Zentral-, Spin-Bahn- und Tensorkräfte berücksichtigt.
- d) Die approximative Lösung der Schrödingergleichung erfolgt mit einem Variationsprinzip. Die Lösung kann demnach schrittweise durch Vergrößern des Raumes der Versuchsfunktionen verbessert werden. Dementsprechend werden Streu- und Bindungsprobleme auf gleiche Weise behandelt.
- e) Es sind Vielkanalstreurechnungen mit komplexen Kernen möglich.
- f) Die entscheidende Rechtfertigung für die RGM ist aber die gute Wiedergabe der experimentellen Daten (Ho 84 a, Ho 83), insbesondere bei leichten Kernen.

Wegen der vollständigen Berücksichtigung des Pauliprinzips wird der Unterschied zwischen verschiedenen Clusterstrukturen, d. h. verschiedenen Wellenfunktionen, vermindert, und in bestimmten Grenzfällen erhält man die Wellenfunktionen und Ergebnisse von anderen Modellen, z. B. des Schalenmodells (Wi 77). Infolge der vollständigen Antisymmetrisierung der Wellenfunktion ist die Resonating-Group-Methode rechentechnisch sehr aufwendig. Mit den zur Zeit zur Verfügung stehenden Computern sind deshalb mikroskopische Vielkanalrechnungen nur für leichte Kerne ($A \lesssim 12$) möglich.

5.2 Die Refined-Resonating-Group-Methode

Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Modell zur Bestimmung der Kernwellenfunktionen geht unter der Annahme einer Zweiteilchenwechselwirkung vom Hamiltonoperator für A Nukleonen der Masse m aus:

$$H_{\text{nucel}} = \sum_{i=1}^A T_i + \sum_{i < j} V_{ij} \quad (5.1)$$

Wegen der Erhaltung des Gesamtimpulses wird die kinetische Energie T_{CM} des Schwerpunkts abgespalten

$$H' = H_{\text{nucel}} - T_{\text{CM}} \quad (5.2)$$

V_{ij} ist ein effektives Nukleon-Nukleon-Potential bestehend aus Wigner-, Bartlett-, Heisenberg- und Majorana-Zentralpotentialen, Spin-Bahn-, Tensor- und natürlich Coulombpotential. Es wurde von einem realistischen NN-Potential (Ei 71) abgeleitet, welches die Zweinukleonenstreu- und -bindungsdaten reproduziert, wobei wegen der hier verwendeten relativ einfachen (d. h. meist keine D-Wellen enthaltenden) Wellenfunktionen der Cluster der repulsive Core abgeschwächt werden mußte, um gebundene Teilchen zu erhalten.

Die Wellenfunktionen der gebundenen Grundzustände werden mit dem Ritzschen Variationsprinzip gewonnen. Diese gebundenen Zustände mit Drehimpuls J und Parität π haben folgende Struktur:

$$\psi^{J\pi} = \mathcal{A} \bar{\psi}^{J\pi} \quad (5.3)$$

$$\bar{\psi}^{J\pi} = \sum_{\alpha \ell S} c_{\alpha}^{\ell SJ} [\chi_{\alpha}^{\ell} \otimes \Xi^{S,(T)}]^{J\pi}, \quad (5.4)$$

wobei $\mathcal{A}$ der Antisymmetrisierer ist.

Die Spin-Isospinfunktion $\Xi^{S,(T)}$ besteht aus Produkten von Einteilchen-Spin-Isospinfunktionen und ist zu Gesamtspin S gekoppelt. Sie kann auch zu Gesamtisospin T gekoppelt werden.

Die Ortsfunktion χ_{α}^{ℓ} besteht aus den clusterinternen Funktionen $\chi_{\alpha, m, int}$ und den Relativfunktionen $\chi_{\alpha, k, rel}^{\ell_k}$:

$$\chi_{\alpha}^{\ell} = \left(\prod_{m=1}^{n_c} \chi_{\alpha, m, int} \right) \left[\prod_{k=1}^{n_c-1} \chi_{\alpha, k, rel}^{\ell_k} \right]^{\ell}. \quad (5.5)$$

Hier ist n_c die Anzahl der Cluster. Die Relativfunktionen mit Drehimpuls ℓ_k sind bei mehr als 2 Clustern zum Gesamtbahndrehimpuls ℓ gekoppelt. Im einzelnen gilt:

$$\chi_{\alpha, m, int} = \exp \left\{ - \frac{\beta_{\alpha, m}}{A_m} \sum_{i < j} (r_i - r_j)^2 \right\}. \quad (5.6)$$

Dabei läuft i und j ($i < j$) über die Teilchen im m -ten Cluster; A_m ist die Zahl der Teilchen im m -ten Cluster ($m \leq n_c$, $A_m \leq 4$, $\sum_{m=1}^{n_c} A_m = A$).

Die Relativfunktionen sind gegeben durch:

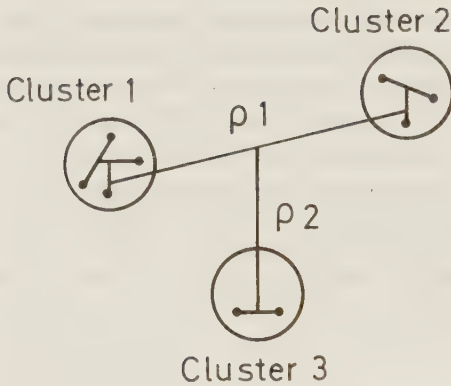


Fig. 5.1:
Beispiel eines Drei-
clustersystems, ϱ_1 und
 ϱ_2 sind die Jacobi-
Relativkoordinaten zwischen
den Clustern.

$$\chi_{\alpha, k, \text{rel}}^{l_k} = \exp(-\chi_{\alpha, k} \varrho_k^2) \varrho_k^{l_k + 2\kappa_k} Y_{l_k m_k}(\hat{\varrho}_k). \quad (5.7)$$

Dabei ist ϱ_k die Jacobi-Koordinate (Anhang 7) zwischen Cluster $k + 1$ und dem Schwerpunkt der ersten k Cluster (s. Fig. 5.1). Schließlich bedeutet die Summe über α mit den Koeffizienten c_{α}^{lSj} in (5.4), daß die Wellenfunktion aus verschiedenen Bahndrehimpulsen l und Spins S , sowie aus verschiedenen Ortsabhängigkeiten (5.5) und (5.6), gekennzeichnet mit α , zusammengesetzt werden kann. Der Index α soll auch verschiedene Fragmentierungen mit $\sum_{m=1}^{n_c} A_m = A$ kennzeichnen, sodaß $\psi^{j\pi}$ eine Überlagerung verschiedener Clustereinteilungen sein kann.

Die Wellenfunktionen für 2-Fragment-Streuzustände werden mit dem Kohn-Hulthén-Variationsprinzip (Ha 73) gewonnen:

$$\delta \left\{ \langle \psi_{\lambda} | H' - E | \psi_{\lambda} \rangle - \frac{1}{2} a_{\lambda\lambda} \right\} = 0. \quad (5.8)$$

Die Funktionen ψ_{λ} lassen sich dabei schreiben als

$$\psi_{\lambda} = \mathcal{A} \left\{ \sum_{\kappa=1}^{n_{\kappa}} \left[\frac{1}{R_{\kappa}} Y_{L_{\kappa}}(\hat{R}_{\kappa}) \otimes [\bar{\psi}_{\kappa}^{J_1 \pi_1} \otimes \bar{\psi}_{\kappa}^{J_2 \pi_2}]^{S_{\kappa}} \right]^J \psi_{\lambda \kappa}^{rel}(R_{\kappa}) \right\}. \quad (5.9)$$

Dabei ist $\bar{\psi}_{\kappa}^{J_i \pi_i}$ der oben beschriebene (Gl. 5.4) gebundene Zustand des i -ten Fragments ($i = 1, 2$) im Kanal κ und n_{κ} die Anzahl der Kanäle. Die Fragment spins J_1 und J_2 werden zum Kanalspin S_{κ} gekoppelt, S_{κ} wird mit dem Relativdrehimpuls L_{κ} zwischen den beiden Fragmenten zum Gesamtdrehimpuls J gekoppelt. R_{κ} ist die Relativkoordinate zwischen den beiden Fragmenten im Kanal κ .

Die Relativwellenfunktion $\psi_{\lambda \kappa}^{rel}$ wird angesetzt als:

$$\psi_{\lambda \kappa}^{rel}(R_{\kappa}) = \delta_{\lambda \kappa} F_{L_{\kappa}}(R_{\kappa}) + a_{\lambda \kappa} \tilde{G}_{L_{\kappa}}(R_{\kappa}) + \sum_{\mu} b_{\lambda \kappa \mu} E_{\kappa \mu}(R_{\kappa}). \quad (5.10)$$

Hierbei sind $F_{L_{\kappa}}$ reguläre Coulombfunktionen (Ab 65) und $\tilde{G}_{L_{\kappa}}$ regularisierte (Ho 84b), d. h. das richtige asymptotische Verhalten besitzende, irreguläre Coulombfunktionen.

$E_{\kappa \mu}$ sind quadratintegrale Funktionen, welche die Relativbewegung der beiden Fragmente im Wechselwirkungsbereich beschreiben und haben die Form:

$$E_{\kappa \mu}(R) = R^{L_{\kappa}+1} \exp(-\delta_{\kappa \mu} R^2). \quad (5.11)$$

Die Reaktanzmatrixelemente $a_{\lambda \kappa}$ und die Koeffizienten $b_{\lambda \kappa \mu}$ sind die Variationsparameter in Gl. (5.8), d. h. die Wellenfunktionen der Fragmente sind fixiert und damit auch ihre Bindungsenergien und die Schwellenenergien der Kanäle. Es wird also nur die Relativwellenfunktion variiert. Zur Lösung der Variationsgleichungen werden die Coulombfunktionen $F_{L_{\kappa}}$ und $\tilde{G}_{L_{\kappa}}$ nach den quadratingegrablen Funktionen $E_{\kappa \mu}$ (Gl. 5.11) entwickelt (Ho 84b):

$$\psi_{\lambda \kappa}^{rel}(R) = \sum_i c_{\lambda \kappa i} E_{\kappa \mu}(R). \quad (5.10')$$

Dies erlaubt eine algebraische Lösung der Variationsgleichungen. Hierbei sind Matrixelemente des Hamiltonoperators und Überlappmatrixelemente mit quadratintegrablen Funktionen zu berechnen. Diese quadratintegrablen Funktionen haben wegen der Struktur der Fragmentwellenfunktionen (Gl. (5.5), (5.6) und (5.7)) und wegen der Entwicklung der Relativwellenfunktion (5.10) nach Funktionen des Typs (5.11) die Struktur:

Gaußfunktion • Monom • Kugelflächenfunktion

Da im Hamiltonoperator die Ortsabhängigkeit der Potentiale durch Gaußfunktionen parametrisiert ist, die kinetische Energie und das Spinbahnpotential Differentialoperatoren enthalten, das Tensorpotential im Ortsraum von der Struktur $r^2 Y_{2q}$ ist und im Coulombpotential $\frac{1}{r}$ durch $\int_0^\infty \exp(-k^2 Br^2) dk$ ausgedrückt wird, können diese Matrixelemente analytisch integriert werden (Ho 84 b).

Dies ist der Hauptunterschied zu anderen Resonating-Group-Methoden, welche die Schrödingergleichung in eine Integrodifferentialgleichung für die Relativwellenfunktion umformen, die Integralkerne analytisch berechnen und die Integralgleichung dann numerisch lösen (Ta 81).

Während für die Lösung der Variationsgleichungen die Normierung der Streufunktion irrelevant ist, muß bei der Berechnung von Strahlungseinfangreaktionen die Normierungsbedingung (4.20) erfüllt sein. Dies ist der Fall, wenn die einlaufende Welle eine in z-Richtung einlaufende Coulombwelle mit Fluß $\underline{j} = \frac{\hbar K}{m}$ ist.

Die Streufunktion mit einer einlaufenden Coulombwelle im Kanal λ und Kanalspin $S_{c\lambda}, M_{S_{c\lambda}}$ hat dann die Form (s. Anhang 3):

$$| \propto S_{c\lambda} M_{S_{c\lambda}} \lambda \rangle = \sum_{L_\lambda=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2L_\lambda+1)} i^{L_\lambda} e^{i\sigma_{L_\lambda}} \sum_{Jj} (L_\lambda 0 S_{c\lambda} M_{S_{c\lambda}} | Jj)$$

$$\cdot \mathcal{A} \left\{ \sum_{\tau} (11 - i a)^{-1} \right\}_{\lambda\tau} \sum_{\kappa} \left(\delta_{\tau\kappa} F_{L_\kappa}(R_\kappa) + a_{\tau\kappa} \tilde{G}_{L_\kappa}(R_\kappa) + \sum_{\mu} b_{\tau\kappa\mu} E_{\kappa\mu}(R_\kappa) \right)$$

$$\cdot \left[\frac{Y_{L_\kappa}(\hat{R}_\kappa)}{K_\kappa R_\kappa} \otimes \left[\bar{\Psi}_\kappa^{J_1} \otimes \bar{\Psi}_\kappa^{J_2} \right]^{S_{c\kappa}} \right]^{Jj} \} \quad (5.12)$$

σ_{L_λ} ist die Coulombstreuphase.

Ein Vergleich mit Gl. (4.22) liefert die Funktionen $|\varphi_{\alpha L_{\lambda} S_{c\lambda} J_j}\rangle$:

$$|\varphi_{\alpha L_{\lambda} S_{c\lambda} J_j}\rangle = \sqrt{4\pi(2L_{\lambda}+1)} i^{L_{\lambda}} e^{i\delta_{L_{\lambda}}} \sum_{\tau} ((1-i a)^{-1})_{\lambda\tau} \quad (5.13)$$

$$\cdot \mathcal{A} \left\{ \sum_{\kappa} (\delta_{\tau\kappa} F_{L_{\kappa}} + a_{\tau\kappa} \tilde{G}_{L_{\kappa}} + \sum_{\mu} b_{\tau\kappa\mu} E_{\kappa\mu}) \left[\frac{Y_{L_{\kappa}}}{R_{\kappa}} \otimes [\bar{\Psi}_{\kappa}^{J_{\lambda} \pi_{\lambda}} \otimes \bar{\Psi}_{\kappa}^{J_c \pi_c}] S_{\kappa} \right]^{J_j} \right\}.$$

Mit diesen Funktionen sind die in Kapitel 4 gegebenen Wirkungsquerschnitte zu berechnen.

Für die Berechnung der Polarisierbarkeit mit Kontinuumswellenfunktionen (Gl. 4.35) verwenden wir die auf $\delta(E-E')$ normierten Streufunktionen

$$|\lambda E J_{\lambda} j_{\lambda}\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{m}{\hbar^2 K_{\lambda}}} \cdot \sum_{\tau} ((1-i a)^{-1})_{\lambda\tau} \quad (5.14)$$

$$\cdot \mathcal{A} \left\{ \sum_{\kappa} (\delta_{\tau\kappa} F_{L_{\kappa}} + a_{\tau\kappa} \tilde{G}_{L_{\kappa}} + \sum_{\mu} b_{\tau\kappa\mu} E_{\kappa\mu}) \left[\frac{Y_{L_{\kappa}}}{R_{\kappa}} \otimes [\bar{\Psi}_{\kappa}^{J_{\lambda} \pi_{\lambda}} \otimes \bar{\Psi}_{\kappa}^{J_c \pi_c}] S_{\kappa} \right]^{J_{\lambda} j_{\lambda}} \right\}.$$

Während dies eine auf δ -Funktion in der Energie normierte Funktion ist, mit dem Gesamtdrehimpuls J_{λ} und seiner z-Komponenten j_{λ} als Quantenzahlen, stellt $|\alpha S_{c\lambda} M_{S_{c\lambda}} \lambda\rangle$ aus Gl. (5.12) eine flußnormierte einlaufende Coulombwelle enthaltende Streufunktion dar, mit dem Kanalspin $S_{c\lambda}$ und $M_{S_{c\lambda}}$ als Quantenzahlen.

5.3 Die analytische Berechnung der Matrixelemente am Beispiel der Norm

Da es sich bei der Berechnung der Matrixelemente um sehr viele $3(A-1)$ dimensionale Integrale handelt, ist es wichtig, diese Integration analytisch durchführen zu können. Dies soll im folgenden erläutert werden.

Wie in Abschnitt 5.2 beschrieben, kann die Wellenfunktion des Nukleonensystems mit Drehimpuls J und magnetischer Quantenzahl j dargestellt werden als:

$$\begin{aligned}\psi^{Jj} &= \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{LSJ} |\alpha LSJj\rangle \\ &= \sum_{\alpha lm} c_{\alpha}^{LSJ} (lm S \sigma | Jj) |\alpha lm\rangle |S \sigma\rangle\end{aligned}\quad (5.15)$$

Die Ortsabhängigkeit von ψ^{Jj} , d. h. die von $|\alpha lm\rangle$ besteht nur aus Gaußfunktionen, Monomen und Kugelflächenfunktionen. Bei gebundenen Zuständen entspricht (5.15) direkt Gl. (5.4), bei Streufunktionen ist mit $\sum_{\alpha} c_{\alpha}^{LSJ}$ auch die Entwicklung der Relativwellenfunktion (5.10) nach quadratintegrablen Funktionen gemeint (5.10'). Da der Antisymmetrisierer $\mathcal{A}$ mit allen Operatoren $O (= \mathbb{1}, H')$ für identische Teilchen vertauscht, sind die Matrixelemente

$$ME = \langle \psi^{Jj'} | \mathcal{A} O | \psi^{Jj} \rangle \quad (5.16)$$

zu berechnen. Der Antisymmetrisierer ist gegeben durch

$$\mathcal{A} = \sum_{P \in S_A} \text{sgn } P \cdot P \quad (5.17)$$

Die Summe läuft über alle Permutationen P aus der symmetrischen Gruppe S_A mit Vorzeichen $\text{sgn } P$, wirkend auf die Orts-, Spin- und Isospinkoordinaten. Der Zweiteilchenoperator $O (= \mathbb{1}, H')$ ist vom Rang Null und wird in Orts- und Spinanteil zerlegt und hat die allgemeine Form:

$$O = \sum_{i < i'} \sum_k \sum_{q=-k}^k (-1)^q w_{ii'}^{Ort}(kq) w_{ii'}^{Spin}(k-q) \quad (5.18)$$

Dementsprechend werden die Matrixelemente in reduzierte Orts- und reduzierte Spinmatrixelemente aufgespalten:

$$\begin{aligned}
 ME &= \langle \psi^{j'j'} | \sum_P \sum_{i, i'} \sum_{k, q} \operatorname{sgn} P(-1)^q w_{ii'}^{out}(kq) w_{ii'}^{spin}(k-q) | \psi^{jj} \rangle \\
 &= \delta_{jj'} \delta_{jj'} \sum_{\substack{\alpha \alpha' P k \\ i, i'}} c_{\alpha'}^{l's'j} * c_{\alpha}^{lSJ} \operatorname{sgn} P(-1)^{l+2S+S'-J} \quad (5.19) \\
 &\quad \cdot \left\{ \begin{matrix} S & l & J \\ l' & s' & k \end{matrix} \right\} \langle \alpha' l' || P w_{ii'}^{out}(k) || \alpha l \rangle \langle \alpha' s' || P w_{ii'}^{spin}(k) || \alpha s \rangle .
 \end{aligned}$$

Da die Ortsraumwellenfunktionen bei Permutationen der Teilchenkoordinaten innerhalb von Clustern invariant sind, ergeben nicht alle Ortsraummatrixelemente verschiedene Werte. Wegen dieser Clustersymmetrie können deshalb für diejenigen Permutationen, die das gleiche Ortsmatrixelement liefern, die Spinisospinmatrixelemente mit dem Vorzeichen $\operatorname{sgn} P$ der Permutation addiert werden. Diese Symmetrie wird gruppentheoretisch durch eine Doppelnebenklassenzerlegung der symmetrischen Gruppe S_A berücksichtigt (Se 75, Sch 84). Aus dem gleichen Grund ergeben bei Zweiteilchenoperatoren auch nicht alle Paare (i, i') wechselwirkender Teilchen verschiedene Ortsmatrixelemente. Es genügt also die Ortsmatrixelemente für Repräsentanten (P, i, i') der Doppelnebenklasse und der wechselwirkenden Teilchen zu berechnen. Diese Einteilung der S_A und der Paare wechselwirkender Teilchen bezeichnet man als Zerlegung in zweifach punktierte Doppelnebenklassen.

Im folgenden soll die Berechnung der Ortsraummatrixelemente $\langle \alpha' l' || P w_{ii'}^{out}(k) || \alpha l \rangle$ kurz skizziert werden (Ha 67, Ha 70, Ho 84b). Wir beschränken uns dabei auf die Normmatrixelemente, da diese grundlegend für alle anderen zu berechnenden Matrixelemente des Hamiltonoperators und auch der elektromagnetischen Übergangsoperatoren sind.

Die reduzierten Ortsmatrixelemente der Norm sind nach dem Wigner-Eckart-Theorem (Ed 60) gegeben durch

$$\langle \alpha' l' || P || \alpha l \rangle = \frac{\sqrt{2l+1}}{(l l 0 0 | l l)} \langle \alpha' l l | P | \alpha l l \rangle \quad (5.20)$$

P ist ein Repräsentant der betrachteten Doppelnebenklasse, 1 der Gesamtbahndrehimpuls und α bezeichnet die übrigen Quantenzahlen und gegebenenfalls auch das Kopplungsschema der Bahndrehimpulse l_k . Die Ortswellenfunktion $|\alpha 11\rangle$ ist von der in (5.6) und (5.7) gegebenen Struktur. Wendet man die Permutation P an und drückt alle Koordinaten durch die Jacobikoordinaten $\{\underline{s}_i, i = 1, \dots, A\}$ (Anhang 7) der Clusterzerlegung der bra-Funktion aus, so ist das Ortsraummatrixelement von folgender Form:

$$\begin{aligned} J_{l' \alpha' l \alpha} (P) &= \\ &= \int d\underline{s}_1 \dots d\underline{s}_{A-1} \exp \left\{ - \sum_{\nu \mu} g_{\nu \mu} \underline{s}_\nu \cdot \underline{s}_\mu \right\} \left(\prod_{u=1}^N Q_u^{L_u} Y_{L_u M_u}(\hat{Q}_u) \right) \\ &=: \Gamma_{L_1 M_1 \dots L_N M_N} \end{aligned} \quad (5.21)$$

(bis auf Phasen, die den Übergang von $Y_{L_u M_u}^* = (-1)^{M_u} Y_{L_u - M_u}$ auf $Y_{L_u M_u}$ in der bra-Funktion berücksichtigen).

Die Vektoren $\underline{Q}_n$ sind Linearkombinationen der Jacobikoordinaten, die L_n bezeichnen die Bahndrehimpulse der Clusterrelativfunktionen, M_n ihre z-Komponenten. Bei der Norm ist N die Anzahl der Clusterrelativkoordinaten, also

$$N = n_{c_l} + n_{c_r} - 2 \quad (5.22)$$

wobei n_{c_l} bzw. n_{c_r} die Zahl der Cluster der linken bzw. rechten Zerlegung ist. Innerhalb der Cluster sind die Teilchen in relativen S-Zuständen, die Drehimpulse sind nur auf die Clusterrelativkoordinaten verteilt. Die Zahl N der Kugelfunktionen ist also die Zahl der Drehimpulse im Matrixelement. Das Integral (5.21) wird nun mit Hilfe der erzeugenden Funktion für Kugelfunktionen (Ro 53) berechnet:

$$(\underline{\Lambda}(b) \cdot \underline{r})^\ell = b^\ell \sum_{m=-\ell}^{\ell} C_{\ell m} b^{-m} r^\ell Y_{\ell m}(\hat{r}) \quad , \quad (5.23)$$

wobei $\underline{\Lambda}(b)$ der Vektor

$$\underline{\Lambda}(b) := (1 - b^2, i + i b^2, -2b) \quad (5.24)$$

ist und

$$C_{l_m} := (-2)^l l! \sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)(l-m)!(l+m)!}} \quad (5.25)$$

gilt.

Um das Integral (5.21) zu berechnen, betrachten wir stattdessen das erzeugende Integral

$$\begin{aligned} I(a_1, b_1, \dots, a_N, b_N) &= \\ &= \int ds_1 \dots ds_{A-1} \exp \left(- \sum_{\nu \mu} g_{\nu \mu} s_\nu s_\mu + \sum_{u=1}^N a_u \Delta(b_u) Q_u \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Entwickelt man die Exponentialfunktion nach Potenzen der Parameter $a_1, b_1, \dots, a_N, b_N$, so erhält man mit Hilfe von (5.23)

$$\begin{aligned} I(a_1, b_1, \dots, a_N, b_N) &= \\ &= \sum_{l_1, m_1, \dots, l_N, m_N} \prod_{u=1}^N \frac{C_{l_u m_u}}{l_u!} a_u b_u^{l_u - m_u} \Gamma_{l_1 m_1, \dots, l_N m_N}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

wobei die $\Gamma_{l_1 m_1, \dots, l_N m_N}$ gerade die gesuchten Integrale sind.

Andererseits kann das erzeugende Integral (5.26) mit Hilfe einer Hauptachsentransformation und quadratischer Ergänzung explizit berechnet werden. Entwickelt man das Ergebnis nach Potenzen von a_n und b_n , liefert der Koeffizientenvergleich mit (5.27) schließlich die gesuchten Integrale.

Dies stellt die Grundlage dar für die Berechnung von Matrixelementen auch anderer Operatoren (Hamiltonoperator), deren Details in den Ref. (Ha 67), (Ha 70) und (Ho 84b) zu finden sind. Im nächsten Kapitel wird diese Methode auf die elektromagnetischen Multipoloperatoren angewandt.

6. DIE ANALYTISCHE BERECHNUNG DER MATRIXELEMENTE DER ELEKTROMAGNETISCHEN MULTIPOLOPERATOREN

6.1 Aufspaltung der Matrixelemente in reduzierte Ortsraum- und Spinmatrixelemente

In diesem Kapitel werden die Matrixelemente der Multipoloperatoren (3.18) und (3.23) mit Wellenfunktionen des Typs (5.15) analytisch berechnet. Dies ist die Grundlage für die Berechnung sämtlicher Observablen. Die Methode ist im wesentlichen die in Abschnitt 5.3 erläuterte.

Zunächst werden die Operatoren (3.18) und (3.23) durch sphärische Tensoren ausgedrückt; dies wird in Anhang 4 explizit durchgeführt ((A.18) bis (A.22)). Man erhält

$$\mathcal{O}(E, LM) = -\frac{2}{k} \sqrt{L(2L+1)} \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{i=1}^A g_{ei} \tilde{w}_i(L-1, 1; LM) \mathbb{1}_{Spin}, \quad (6.1a)$$

$$\mathcal{O}'(E, LM) = -k \sqrt{\frac{L}{L+1}} \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{i=1}^A g_{si} \sum_{qq'} (Lq \ 1q' | LM) w_i(Lq) S_i(q'), \quad (6.1b)$$

$$\mathcal{O}(M, LM) = -2 \sqrt{\frac{L}{L+1}} \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{i=1}^A g_{ei} \tilde{w}_i(L, 1; LM) \mathbb{1}_{Spin}, \quad (6.1c)$$

$$\mathcal{O}'(M, LM) = \sqrt{L(2L+1)} \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{i=1}^A g_{si} \sum_{qq'} (L-1q \ 1q' | LM) w_i(L-1q) S_i(q'), \quad (6.1d)$$

$$\mathcal{O}_{ST}(E, LM) = e \sum_{i=1}^A g_{ei} w_i(LM) \mathbb{1}_{Spin}. \quad (6.1e)$$

Hierbei ist $S_i(q)$ die q -te sphärische Komponente des Spinoperators $\underline{S}_i$, wirkend auf Teilchen i , und $\mathbb{1}_{Spin}$ die Identität im Spinraum.

Die Ortsraumoperatoren $w_i(\lambda \mu)$ und $\tilde{w}_i(\lambda, 1; LM)$ sind wie folgt definiert:

$$w_i(\lambda\mu) := \tilde{r}_i^\lambda Y_{\lambda\mu}(\hat{\underline{e}}_i) , \quad (6.2a)$$

$$\tilde{w}_i(\lambda, 1; LM) := \sum_{q q'} (\lambda q 1 q' | LM) \tilde{r}_i^\lambda Y_{\lambda q}(\hat{\underline{e}}_i) \nabla_i(q') \quad (6.2b)$$

($\lambda = L - 1, L$),

wobei $\nabla_i(q)$ die q-te sphärische Komponente des Gradienten ist, wirkend auf $\tilde{r}_i$.

Die Spinraumstruktur der Operatoren (6.1) sind also entweder durch den Einsoperator 1_{Spin} (bei den Bahnoperatoren $O(E, LM)$, $O(\mathcal{M}, LM)$ und $O_{ST}(E, LM)$) oder die Vektoroperatoren $S_i(q)$ (bei den Spinoperatoren $O'(E, LM)$ und $O'(\mathcal{M}, LM)$) gegeben. Im Ortsraum bestehen die Operatoren entweder aus einer Kugelflächenfunktion (bei den Spinoperatoren $O'(E, LM)$ und $O'(\mathcal{M}, LM)$ und beim Siegertoperator $O_{ST}(E, LM)$) oder aus einer Kugelflächenfunktion und dem Gradientenoperator $\nabla_i(q)$, gekoppelt zum Rang L (bei den Bahnoperatoren $O(E, LM)$ und $O(\mathcal{M}, LM)$). Es müssen also sowohl im Spinraum als auch im Ortsraum nur zwei verschiedene Typen von Matrixelementen berechnet werden. Dazu werden die Matrixelemente der Operatoren (6.1) mit Funktionen des Typs (5.15) analog Gl. (5.19) in reduziertes Ortsraum- und reduziertes Spinmatrixelement aufgespalten. Dies wird in Anhang 5 durchgeführt ((A.26) bis (A.30)). Das Ergebnis ist für die Bahnoperatoren $O(\text{Bahn}, LM)$ ($= O(E, LM)$, $O(\mathcal{M}, LM)$, $O_{ST}(E, LM)$) von der Struktur:

$$\begin{aligned} & \langle \psi^{J'j'} | O(\text{Bahn}, LM) | \psi^{Jj} \rangle \\ & \sim \delta_{SS'} \sum_{\alpha\alpha'P} C_{\alpha'}^{L'SJ'^*} C_{\alpha}^{LSJ} \text{sgn} P (-1)^{L+L'+S+j} \\ & \cdot \sqrt{\frac{(2J+1)(2J'+1)}{2S+1}} \left\{ \begin{matrix} L' & L & L \\ J & J' & S \end{matrix} \right\} (J'j' J-j | LM) \\ & \cdot \sum_{i=1}^A g_{Li} \langle \alpha' L' | P w_i^{Ort}(L) | \alpha L \rangle \langle \alpha' S | P | \alpha S \rangle , \end{aligned} \quad (6.3)$$

wobei w_i^{Ort} einer der Operatoren w_i oder $\tilde{w}_i$ ist. Das Kroneckersymbol $\delta_{SS'}$ drückt die Erhaltung des Gesamtspins aus, der Clebsch-Gordan-Koeffizient gibt die Auswahlregel für den Gesamtdrehimpuls.

Für die Spinoperatoren $O(\text{Spin}, LM) (= O'(\mathcal{E}, LM), O'(\mathcal{M}, LM))$ gilt:

$$\begin{aligned} & \langle \psi^{J'j'} | A O(\text{Spin}, LM) | \psi^{Jj} \rangle \\ & \sim \sum_{\alpha \alpha' P} c_{\alpha'}^{l's'j'} c_{\alpha}^{l s j} \text{sgn } P (-1)^{s'+s+l'+l+j+j'} \\ & \cdot \sqrt{(2j'+1)(2j+1)} \begin{Bmatrix} s' & s & 1 \\ l' & l & \lambda \\ j' & j & L \end{Bmatrix} (J' j' j - j | LM) \\ & \cdot \sum_{i=1}^A g_{si} \langle \alpha' l' | P w_i(\lambda) | \alpha l \rangle \langle \alpha' s' | P S_i | \alpha s \rangle \end{aligned} \quad (6.4)$$

mit $\lambda = L$ für $O'(\mathcal{E}, LM)$ und $\lambda = L - 1$ für $O'(\mathcal{M}, LM)$. Es bleibt also noch die Berechnung der reduzierten Spinmatrixelemente $\langle \alpha' s' | P 1_{\text{Spin}} | \alpha s \rangle$ und $\langle \alpha' s' | P S_i | \alpha s \rangle$ und der reduzierten Ortsraummatrixelemente $\langle \alpha' l' | P w_i(\lambda) | \alpha l \rangle$ und $\langle \alpha' l' | P \tilde{w}_i(\lambda, 1; L) | \alpha l \rangle$ ($\lambda = L, L - 1$), wobei P die betrachtete Permutation und i das wechselwirkende Teilchen ist.

Die Berechnung der reduzierten Spinmatrixelemente erfolgt auf kanonische Weise: Aufgrund des Wigner-Eckart-Theorems (Ed 60) genügt es, Matrixelemente der Operatoren 1_{Spin} und S_i zwischen Zuständen $|\alpha s, \sigma = s\rangle$ mit maximaler z-Quantenzahl σ zu berechnen:

$$\langle \alpha' s' | P w_i^{\text{Spin}}(k) | \alpha s \rangle = \frac{\sqrt{2s'+1}}{(s s' k s' - s | s' s')} \langle \alpha' s' s' | P w_i^{\text{Spin}}(k, s' - s) | \alpha s s \rangle, \quad (6.5)$$

wobei $w_i^{\text{Spin}}(k)$ der Spinoperator $1_{\text{Spin}}(k = 0)$ oder $S_i(s' - s)(k = 1)$ ist.

Die Wirkung der Spinoperatoren auf den Zustand $|\alpha SS\rangle$ ist klar, da dieser eine Linearkombination von Produkten von Einteilchen-Spin-Isospin-Funktionen ist.

Genau wie im Fall des Zweiteilchenhamiltonoperators oder der Norm (Kap. 5.3), nützt man nun die Symmetrie der Ortswellenfunktion bei Permutationen innerhalb der Cluster aus. Da es sich jetzt um Einteilchenoperatoren handelt, man also nur ein wechselwirkendes Teilchen hat, spricht man gruppentheoretisch von der Zerlegung der symmetrischen Gruppe S_A in einfach punktierte Doppelnebenklassen (Se 75). Man berechnet die Ortsmatrixelemente folglich nur für einen Repräsentanten der Permutation und des wechselwirkenden Teilchens pro punktierte Doppelnebenklasse. Die innerhalb einer punktierten Doppelnebenklasse liegenden Spinmatrixelemente können mit dem Vorzeichen der Permutation aufaddiert werden, da die zugehörigen Ortsmatrixelemente alle gleich sind. Dadurch wird die Anzahl der zu berechnenden Ortsraummatrixelemente erheblich verringert. (Zum Beispiel müssen bei 7 Teilchen und der Clustereinteilung $[4,3]$ statt $7! \cdot 7 = 35280$ Matrixelemente höchstens 16 Ortsmatrixelemente berechnet werden.)

6.2 Die reduzierten Ortsraummatrixelemente

Zur weiteren Berechnung der Matrixelemente sind noch die reduzierten Ortsraummatrixelemente der Operatoren $w_i(\lambda \mu)$ und $\tilde{w}_i(\lambda, 1, LM)$ ($\lambda = L, L-1$) zu bestimmen. Analog Gl. (5.20) werden diese reduzierten Matrixelemente mittels des Wigner-Eckart-Theorems (Ed 60) mit zu maximaler z-Quantenzahl gekoppelten Zuständen berechnet:

$$\langle \alpha' l' l' \| P w_i^{Ort}(\lambda) \| \alpha l l \rangle = \frac{\sqrt{2l' + 1}}{(l l \lambda l' l' l' l')} \langle \alpha' l' l' l' \| P w_i^{Ort}(\lambda l' l) \| \alpha l l \rangle, \quad (6.6)$$

wobei w_i^{Ort} einer der obigen Ortsraumoperatoren ist.

Die Matrixelemente $\langle \alpha' l' l' | P w_i^{\text{Ort}} (\lambda l' l) | \alpha l l \rangle$ können mit Hilfe der erzeugenden Funktion der Kugelfunktionen und mit quadratischer Ergänzung analog der in Abschnitt 5.3 beschriebenen Methode in analytischer Form angegeben werden. Die explizite Berechnung erfolgt in Anhang 6. Als Ergebnis erhält man, daß die Matrixelemente der betrachteten Operatoren (6.2) auf die bekannten Normintegrale (bzw. eine Summe von Normintegralen) zurückgeführt werden können.

Wie schon erwähnt, gibt es zwei strukturell verschiedene Typen von Ortsraummatrixelementen. Im Detail lautet das Ergebnis für einen Operator mit Gradienten (also $\tilde{w}_j$)

$$\begin{aligned} & \langle \alpha' l' l' | P \tilde{w}_i (\lambda, l; L l' l) | \alpha l l \rangle \\ &= (\text{Phasen}) \cdot \sum_{n=1}^{N+1} K_n \frac{L_n}{C_{L_n M_n}} \\ & \cdot \left\{ \sqrt{2} C_{L_n-1 M_n+1} (\lambda l' l-1 1 1 | L l' l) \Gamma_{L_1 M_1 \dots L_{n-1} M_{n-1} \dots L_n M_n} \lambda l' l-1 \right. \\ & - 2 C_{L_n-1 M_n} (\lambda l' l-1 1 0 | L l' l) \Gamma_{L_1 M_1 \dots L_{n-1} M_{n-1} \dots L_n M_n} \lambda l' l \\ & \left. + \sqrt{2} C_{L_n-1 M_n-1} (\lambda l' l+1 1 -1 | L l' l) \Gamma_{L_1 M_1 \dots L_{n-1} M_{n-1} \dots L_n M_n} \lambda l' l+1 \right\}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

dabei ist $\lambda = L - 1$ für den elektrischen Bahnoperator $O(E, LM)$ und $\lambda = L$ für den magnetischen Bahnoperator $O(M, LM)$. Die Phasen sind die schon bekannten, die durch den Übergang von Y_{lm}^* auf Y_{lm} in der bra-Funktion entstehen.

Die koordinatenabhängigen Faktoren K_n sind durch (A.34) gegeben, die Koeffizienten C_{lm} durch Gl. (5.25). Die Größen $\Gamma_{\dots l_n \dots}$

sind Normintegrale, die jetzt allerdings einen "Drehimpuls" mehr enthalten. Die Wirkung des Differentialoperators kommt dadurch zum Ausdruck, daß in Gl. (6.7) beim n-ten Summanden der n-te Drehimpuls L_n um 1 erniedrigt wird (falls $L_n \neq 0$).

Für den Operator w_j , der keinen Gradienten enthält, erhält man natürlich nur ein Normintegral, allerdings mit einem "Drehimpuls" mehr:

$$\langle \alpha' l' l' | P w_j(\lambda l' l) | \alpha l l \rangle = (\text{Phasen}) \sqrt{L_1 M_1 \dots L_N M_N} \lambda l' l \quad (6.8)$$

mit $\lambda = L$ für den elektrischen Spinoperator $O'(\mathcal{E}, LM)$ und dem Siegert-operator $O_{ST}(\mathcal{E}, LM)$, $\lambda = L - 1$ für den magnetischen Spinoperator $O'(\mathcal{M}, LM)$.

Damit sind die Matrixelemente der elektromagnetischen Multipoloperatoren (6.1) für beliebige Multipolarität L sowohl für die Kopplung der Bahnbewegung als auch der Spins an das elektromagnetische Feld für die Langwellennäherung in analytischer Form gegeben. Für den elektrischen Bahnoperator stehen zwei verschiedene Formen zur Verfügung: mit und ohne Verwendung des Siegert-Theorems. Es wird sich allerdings zeigen, daß nur der das Siegert-Theorem enthaltende Operator verwendet werden darf um brauchbare Ergebnisse zu erhalten.

6.3 Die Matrixelemente der Polarisierbarkeit

Für die elektrische Polarisierbarkeit in der sog. Closure-Näherung werden die Matrixelemente des Operators $T(k, q)$ ($k = 0, 2$) (Gl. 4.36, 4.37) benötigt. Der Operator $T(k, q)$ ist in allgemeiner Form ein Zweiteilchenoperator, was aber keine weitere Schwierigkeit bedeutet, denn zum einen ist auch der Hamiltonoperator ein Zweiteilchenoperator, dessen Matrixelemente mit der hier verwendeten Methode berechnet werden, zum anderen werden alle Teilchenkoordinaten durch Jacobikoordinaten ausgedrückt. Da in Gl. (4.37) die Summe über i und i' auch Summanden für $i = i'$ enthält, kann von T ein Einteilchenanteil abgespalten werden:

$$\begin{aligned}
 T(k, q) &= \sum_{i=1}^A e^2 g_{li} \sum_m (1-m, 1q-m | kq) \tilde{r}_i^2 Y_{1m}(\hat{\vec{r}}_i) Y_{1q-m}(\hat{\vec{r}}_i) \\
 &\quad + \sum_{i \neq i'} e^2 g_{li} g_{li'} \sum_m (1m, 1q-m | kq) \tilde{r}_i Y_{1m}(\hat{\vec{r}}_i) \tilde{r}_{i'} Y_{1q-m}(\hat{\vec{r}}_{i'}) \\
 &=: \sum_i t_i(k, q) + \sum_{i \neq i'} t_{ii'}(k, q) .
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Der Einteilchenanteil $\sum_i t_i(2, q)$ kann mit Hilfe der Multiplikationsregel für Kugelfunktionen geschrieben werden als

$$\sum_i t_i(2, q) = e^2 \sqrt{\frac{3}{10\pi}} \sum_i g_{li} \tilde{r}_i^2 Y_{2q}(\hat{\vec{r}}_i) = e^2 \sqrt{\frac{3}{10\pi}} \Theta_{ST}(\epsilon, 2q) . \tag{6.10}$$

Für $\sum_i t_i(0, 0)$ erhält man entsprechend

$$\sum_i t_i(0, 0) = -e^2 \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \sum_i g_{li} \tilde{r}_i^2 = -Ze \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \cdot \frac{1}{Z} \sum_i g_{li} \tilde{r}_i^2 . \tag{6.11}$$

Die Einteilchenanteile sind also proportional zum E2-Operator bzw. zum Ladungsradiusoperator, sodaß nur die Matrixelemente der Zweiteilchenanteile neu berechnet werden müssen. Da der Operator nicht auf den Spin wirkt, genügt es also,

$$\langle \alpha' l' l' | P \sum_m (1m, 1l'-l-m | k l'-l) \tilde{r}_i Y_{1m}(\hat{\vec{r}}_i) \tilde{r}_{i'} Y_{1l'-l-m}(\hat{\vec{r}}_{i'}) | \alpha l l \rangle$$

($k = 0, 2$) zu berechnen.

Analog Anhang 6 für die elektromagnetischen Einteilchenoperatoren sind diese Matrixelemente aber durch Normintegrale gegeben, die jetzt allerdings zwei "Drehimpulse" mehr enthalten, was eine Folge des Zweiteilchencharakters ist:

$$\begin{aligned}
 & \langle \alpha' l' l' | P \sum_m (1_m 1 l' l - m | k l' l) \tilde{r}_i Y_{lm}(\hat{r}_i) \tilde{r}_i Y_{l' l' - m}(\hat{r}_i) | \alpha l l \rangle \\
 & = (\text{Phasen}) \sum_m (1_m 1 l' l - m | k l' l) \prod_{L_1 M_1 \dots L_N M_N} 1_m 1 l' l - m.
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Nach den Wechselwirkungsoperatoren und den Wellenfunktionen kennen wir nun auch die damit berechneten Matrixelemente. Nun können die in Kapitel 4 angegebenen Observablen berechnet werden und mit experimentellen Ergebnissen verglichen werden.

7. ERGEBNISSE UND FOLGERUNGEN

In diesem Kapitel wollen wir die in den vorangegangenen Abschnitten erläuterten Methoden auf die Beschreibung elektromagnetischer Eigenschaften leichter Atomkerne anwenden. Wir betrachten speziell Grundzustandseigenschaften, wie mittlerer quadratischer Radius, elektrisches Quadrupolmoment und magnetisches Dipolmoment von ${}^6\text{Li}$, ${}^7\text{Li}$ und ${}^7\text{Be}$ und elektromagnetische Übergänge zwischen tiefliegenden Zuständen in diesen Kernen (7.1). Weiterhin betrachten wir die Strahlungseinfangrelation $\alpha + {}^3\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma$ bei kleinen Energien (7.2) und studieren die elektrische Polarisierbarkeit von ${}^7\text{Li}$ (7.3). Obwohl alle diese Größen und Phänomene nicht unabhängig voneinander betrachtet werden können, ist es aus organisatorischen Gründen angebracht, sie der Reihe nach zu behandeln. Trotzdem wird aber in den einzelnen Abschnitten 7.1 bis 7.3 auf die jeweils anderen verwiesen, bzw. vorgegriffen werden. In Abschnitt 7.1 werden auch bereits alle verwendeten Bound-State-Wellenfunktionen vorgestellt.

Alle Ergebnisse werden mit experimentellen Daten, soweit vorhanden, verglichen, wobei es sich zum Teil um erst kürzlich durchgeführte Experimente handelt.

Erstrebenswert ist eine konsistente mikroskopische Beschreibung aller dieser Größen mit ein und demselben N-N-Potential für alle hier betrachteten Kerne, mit gleichwertiger Beschreibung von gebundenen Zuständen und Streuwellenfunktionen. Hieraus lassen sich Aussagen über kollektive Eigenschaften, wie z. B. Deformation und Clustering gewinnen. Weiterhin kann das verwendete Potential besser beurteilt werden und mögliche Defekte können erkannt werden. Falls nicht ausdrücklich daraufhingewiesen wird, wurde in allen Fällen das sog. Stöwe-Zahn-Potential (We 81) verwendet, das keinen freien Parameter enthält und das sowohl Spinbahn- als auch Tensorkraft beinhaltet. Als Übergangsoperatoren verwenden wir, falls nicht ausdrücklich anderes erwähnt wird, die Summe von Bahn- und Spinoperator. Als elektrischer Bahnoperator muß der aus dem Siegert-Theorem stammende Operator $O_{ST}(\mathcal{E}, LM)$ gewählt werden. Die impulsabhängige Form (3.18 a) des elektrischen Bahnoperators liefert in den meisten Fällen unakzeptable (manchmal um Größenordnungen abweichende) Ergebnisse.

Dies kann am Beispiel des Zweinukleonensystems verstanden werden. Wenn $\psi(r)$ und $\psi'(r)$ die Zweiteilchenradialwellenfunktionen für die Relativkoordinate r bezeichnen, so ist das reduzierte Matrixelement des Operators (3.18a) für $l = 1$ -Zustände proportional zu

$$M := \int d^3r \psi'(r) Y_{10}(\hat{r}) \nabla(r^2 Y_{20}(\hat{r})) \frac{1}{i} \nabla(\psi(r) Y_{10}(\hat{r})).$$

(Damit die Wellenfunktionen reell sind, wurde Y_{10} für den Winkelanteil gewählt.)

Partielle Integration liefert dann wegen der Harmonizität von $r^2 Y_{20}$

$$M = - \int d^3r \frac{1}{i} [\nabla(\psi'(r) Y_{10}(\hat{r}))][\nabla(r^2 Y_{20}(\hat{r}))] \psi(r) Y_{10}(\hat{r}).$$

Für $\psi' = \psi$ ergibt sich $M = -M$, also $M = 0$. Häufig betrachtet man nun Übergänge zwischen Zuständen mit der gleichen Ortsraumstruktur, aber verschiedener Kopplung von Spin und Bahndrehimpuls zum Gesamtbahndrehimpuls, so z. B. beim Grundzustandsdublett von ${}^7\text{Li}$. Weiterhin wird in einfachen Clustermodellen die Radialabhängigkeit dieser Relativwellenfunktionen oft als eine Gaußfunktion mit derselben Weite für beide Zustände dargestellt. Folglich verschwindet das Matrixelement des Operators (3.18a) für diese Zustände. Dies gilt nun nicht nur für zwei Teilchen, sondern wird für sieben Teilchen bei vollständiger Antisymmetrisierung numerisch bestätigt. Für einfache Clustermodelle ist also der Operator (3.18a), nicht nur weil er Mesonaustauscheffekte vernachlässigt (s. Kap. 3.4), sondern auch aus technischen Gründen ungeeignet.

Die Operatoren sind also

für elektrische Übergänge: $O_{ST}(E, LM) + O'(E, LM),$

für magnetische Übergänge: $O(M, LM) + O'(M, LM),$

wobei der elektrische Spinoperator höchstens Prozenteffekte zum Matrixelement beiträgt.

In den folgenden Abschnitten wird zur Charakterisierung der Wellenfunktion häufig von der Clusterzerlegung gesprochen, wobei die Cluster mit den Namen

physikalischer Teilchen, wie z. B. α , ${}^3\text{He}$, d usw., bezeichnet werden. Dies bedeutet nicht, daß es sich dabei um diese Teilchen handelt, denn einerseits besitzen die physikalischen Teilchen meist eine D-Zustandsbeimischung, die Cluster per definitionem aber nicht, andererseits wirkt auf die Teilchen der Cluster der Antisymmetrisierer, welcher die Identifizierung der Teilchen unmöglich macht. Weiterhin ist die Wellenfunktion eines im Kern gebundenen Clusters nicht unbedingt die des freien Teilchens. Vielmehr können die Weiteparameter dieses Clusters zur Ritz-Variation freigegeben sein, um eine bessere Beschreibung des zusammengesetzten Systems zu erreichen. Diese Beschreibungsart ist also nur als Bezeichnung zu verstehen.

7.1 Multipolmomente und elektromagnetische Übergänge

7.1.1 Der Atomkern ${}^6\text{Li}$

Denken wir uns den Grundzustand von ${}^6\text{Li}$ aus zwei Clustern, α und d, mit Relativdrehimpuls $L_{\text{rel}} = 0$ aufgebaut, was im Einteilchenbild dem Zustand $(1s^4)(1p)^2$ entspräche, so hätte dieses ${}^6\text{Li}$ kein Quadrupolmoment im Gegensatz zum gemessenen Quadrupolmoment von $Q_{\text{Li}} = -.06 \text{ efm}^2$. Baut man deshalb in den Kern ${}^6\text{Li}$ ein "realistisches" Deuteron mit D-Welle ein - dies entspricht einer Zerlegung von ${}^6\text{Li}$ in drei Cluster ($\alpha + p + n$) -, so hätte wegen des positiven Quadrupolmoments des Deuterons ($Q_{\text{dH}} = .28 \text{ efm}^2$) auch ${}^6\text{Li}$ ein positives Quadrupolmoment im Widerspruch zum Experiment. So ist zu verstehen, daß eine realistische Beschreibung der elektromagnetischen Eigenschaften von ${}^6\text{Li}$ eine Zerlegung in drei Cluster mit S- und D-Wellen auf beiden Clusterrelativkoordinaten erfordert. Wir verwenden deshalb zur Beschreibung des Grundzustandes von ${}^6\text{Li}(J^\pi = 1^+, T = 0)$ und des angeregten $T = 0$ -Tripletts ($J^\pi = 3^+, 2^+, 1^+$) die Wellenfunktion (s. Fig. 7.1)

$$\Psi^{J^\pi} = \mathcal{A} \left\{ \exp\left(-\frac{\beta}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (\underline{r}_i - \underline{r}_j)^2 - \gamma \underline{s}_4^2\right) \right. \quad (7.1)$$

$$\left. \cdot \sum_{n=1}^2 \sum_{\substack{\ell_1, \ell_2=0,2 \\ L}} c_n^{\ell_1 \ell_2 L} \exp(-\delta_n \underline{s}_5^2) \left[\left[\mathcal{Y}_{\ell_1}(\underline{s}_4) \otimes \mathcal{Y}_{\ell_2}(\underline{s}_5) \right]^L \otimes \underline{1} \right]^{J^\pi} \right\}$$

Die Parameter β , γ , δ_n und $c_n^{\ell_1 \ell_2 L}$ sind in Anhang 8 gegeben.

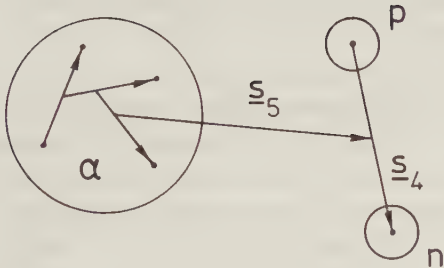


Fig. 7.1:
 ${}^6\text{Li}$ als Dreiclustersystem
 $(\alpha + p + n)$ mit den Relativ-
 jacobikoordinaten S_4 und S_5 .
 Die beiden Cluster, die nur
 aus p und n bestehen, sind
 elementare Nukleonen.

Tabelle 1: Vergleich der berechneten elektromagnetischen Eigenschaften
 von ${}^6\text{Li}$ mit experimentellen Daten

	Theorie	Experiment
r_c/fm	2.40	$2.54 \pm .06$ $2.56 \pm .05$ (Ja 74) $2.57 \pm .10$
Q/efm^2	- .076	$-.0644 \pm .0007$ (Aj 84)
μ/μ_k	.83	.822 (Aj 84)
$B(E 2, 3^+ \rightarrow 1^+)/e^2 \cdot \text{fm}^4$	10.1	10.9 ± 2.1 (Aj 84)
$B(E 4, 3^+ \rightarrow 1^+)/e^2 \cdot \text{fm}^8$	7.0	
$B(M 3, 3^+ \rightarrow 1^+)/\mu_k^2 \cdot \text{fm}^4$	91	
$B(E 2, 2^+ \rightarrow 1^+)/e^2 \cdot \text{fm}^4$	17	4.7 ± 1.5 (Aj 84, Ei 69) 10.8 ± 1.1 (Be 63)
$B(M 1, 2^+ \rightarrow 1^+)/\mu_k^2$	$.7 \cdot 10^{-4}$	
$B(M 3, 2^+ \rightarrow 1^+)/\mu_k^2 \cdot \text{fm}^4$	125	
$B(E 2, 1^{+*} \rightarrow 1^+)/e^2 \cdot \text{fm}^4$	23	
$B(M 1, 1^{+*} \rightarrow 1^+)/\mu_k^2$	$2 \cdot 10^{-4}$	

In Tabelle 1 werden die berechneten Werte, nämlich der Ladungsradius r_c , das Quadrupolmoment Q , das magnetische Moment μ und die verschiedenen B-Werte mit vorhandenen experimentellen Daten verglichen.

Das winzige Quadrupolmoment ist das Resultat der Überlagerung beider D-Wellen (Ho 84c). Beschrieb man ${}^6\text{Li}$ als α -Deuteron-System im relativen S-Zustand aber das Deuteron sowohl S- als auch D-Welle enthaltend, so erhielte man $Q({}^6\text{Li}) \approx + .03 \text{ efm}^2$, also das falsche Vorzeichen. Würde man für den α -Relativzustand S- und D-Welle zulassen, aber ein Deuteron ohne D-Welle verwenden, wäre das Resultat der viel zu große Wert $Q({}^6\text{Li}) \approx - 1 \text{ efm}^2$. Nur wenn auf beiden Relativkoordinaten S- und D-Welle zugelassen werden, erhält man das wegen des kleinen Wertes gut mit dem Experiment übereinstimmende Ergebnis aus Tab. 1. Die Übereinstimmung des $B(E\ 2, 3^+ \rightarrow 1^+)$ -Wertes mit dem experimentellen Wert ist ausgezeichnet und auch die Größenordnung des Übergangs vom schon relativ hochliegenden 2^+ -Zustand in den Grundzustand wird richtig wiedergegeben, wobei zu berücksichtigen ist, daß die Meßdaten wegen des wenig bekannten Untergrunds ziemlich unsicher sind (Ei 69).

Insgesamt läßt sich feststellen, daß die Dreiclusterbeschreibung die elektromagnetischen Eigenschaften des Grundzustandes und des ersten angeregten Zustandes sehr gut wiedergibt.

7.1.2 Die Kerne ${}^7\text{Li}$ und ${}^7\text{Be}$

Zunächst betrachten wir ${}^7\text{Li}$ und ${}^7\text{Be}$ aus 2 Clustern (${}^4\text{He} + {}^3\text{H} / {}^3\text{He}$) aufgebaut mit Relativdrehimpuls $L_{\text{rel}} = 1$. Im Einteilchenbild entspricht dies dem Zustand $(1s)^4(1p)^3$ mit 3 Anregungsquanten. Die Spinbahnwechselwirkung spaltet den Zustand mit $L_{\text{rel}} = 1$ und Gesamtspin $S = \frac{1}{2}$ in den Grundzustand mit $J^\pi = \frac{3}{2}^-$ und den ersten angeregten Zustand mit $J = \frac{1}{2}^-$ auf.

Damit ist die Wellenfunktion dieser beiden Zustände gegeben durch (vgl. Gl. (5.3) und (5.4)):

$$\psi^{\text{J}\pi} = \mathcal{A} \left\{ \sum_{m=1}^M c_m \exp \left(-\frac{1}{4} \beta_m \sum_{1 \leq i, j \leq 4} (r_i - r_j)^2 - \frac{1}{3} \gamma_m \sum_{5 \leq i, j \leq 7} (r_i - r_j)^2 - \delta_m s_6^2 \right) \cdot \left[Y_1(s_6) \otimes \equiv^{1/2} \right]^{\text{J}} \right\} . \quad (7.2)$$

(s_6 ist die Jacobirelativkoordinate zwischen den beiden Clustern, s. Fig. A1).

Die beiden verwendeten Wellenfunktionen sind in Anhang 8 spezifiziert und werden im folgenden mit WF 1 und WF 2 bezeichnet. Sie unterscheiden sich dadurch, daß im Falle von WF 1 das Variationsverfahren zur Bestimmung der Weiten nur für den $\frac{3}{2}^-$ -Grundzustand durchgeführt wurde und die so erhaltenen Weiten für den $\frac{1}{2}^-$ -Zustand übernommen wurden, während im Fall von WF 2 zur Bestimmung der Relativweite δ des $\frac{1}{2}^-$ -Zustandes eine weitere Variation durchgeführt wurde. Die Koeffizienten c_m werden durch die Diagonalisierung des Hamiltonian im Modellraum geliefert. Die Ergebnisse für den mittleren quadratischen Radius rms, den Ladungsradius r_c , das elektrische Quadrupolmoment Q , das magnetische Dipol- und Oktupolmoment μ und Ω und die E2- und M1-Übergangsstärken in den angeregten Zustand einschließlich vorhandener experimenteller Daten sind für ${}^7\text{Li}$ in Tab. 2, für ${}^7\text{Be}$ in Tab. 3 zu finden.

Während das elektrische Quadrupolmoment und der $B(E2)$ -Wert erstaunlich gut wiedergegeben werden, fallen das magnetische Dipolmoment und der $B(M1)$ -Wert etwas zu klein aus. Hier kommt zum Vorschein, daß in den magnetischen Operatoren keine mesonischen Beiträge berücksichtigt sind.

Berechnet man den Strahlungseinfang ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, wobei der gebundene Zustand ${}^7\text{Be}$ durch die Wellenfunktion WF 1 beschrieben wird, so erhält man einen um etwa eine Größenordnung zu kleinen Wirkungsquerschnitt. Die Ursache hierfür ist, daß die Relativfunktion von WF 1 durch nur eine Gaußfunktion gegeben ist, also nicht das richtige asymptotische Verhalten hat, sondern viel zu kurzreichweitig ist (s. Abschnitt 7.2). Dies zeigt sich auch im zu kleinen Ladungsradius.

Tabelle 2: Berechnete elektromagnetische Eigenschaften von ${}^7\text{Li}$ für die Wellenfunktionen WF 1 und WF 2 einschließlich experimenteller Daten.

	WF 1	WF 2	Experiment
rms/fm	2.34		
r_c/fm	2.27		$2.55 \pm .07$ (Ni 71) $2.39 \pm .03$ } (Ja 74) $2.41 \pm .1$ }
Q/efm^2	-3.71		$[3.8 \pm 1.1]$ (Ni 71) -4.1 (Or 75) -3.4 $\pm$.6 (Eg 80) -4.0 $\pm$ 1.1 (Ve 84) -3.70 $\pm$.08 (We 84, We 85) -3.66 $\pm$.03 (Gr 71) *) -4.06 (Su 84) *)
μ/μ_k	3.16		3.256 (Aj 84)
$\Omega/\mu_k \cdot \text{fm}^2$	-10.5		$[7.5 \pm 1.6]$ (Ra 66) $[9.3 \pm .4]$ (Ni 71)
$B(E2, \frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^-)/e^2 \cdot \text{fm}^4$	6.86	8.49	$6.7 \pm .2$ (Ni 71) $7.4 \pm .1$ (Ba 72) $8.3 \pm .6$ (Hä 73) $7.42 \pm .14$ (Ve 84) $8.3 \pm .5$ (We 84, 85)
$B(M1, \frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^-)/\mu_k^2$	2.17	1.96	$2.48 \pm .12$ (Ni 71)

*) Beruhend auf der Berechnung des elektrischen Feldgradienten.

Dieser Defekt kann behoben werden, wenn man als Relativfunktion vier Gaußfunktionen zuläßt. Diese Wellenfunktion heiße WF 3 und ist ebenfalls in Anhang 8 gegeben. Für ${}^7\text{Li}$ erhält man mit dieser Wellenfunktion die in Tabelle 4 aufgeführten elektromagnetischen Eigenschaften.

Während nun der Ladungsradius innerhalb der Fehlergrenzen des gemessenen Wertes liegt, sind nun das Quadrupolmoment und der $B(E2)$ -Wert zu groß. Es stellt sich jedoch heraus, daß diese zu großen elektrischen Werte kompensiert

Tabelle 3: Wie Tabelle 2 für ${}^7\text{Be}$

	WF 1	Experiment
rms/fm	2.34	
r_c/fm	2.39	
Q/efm^2	-5.84	
μ/μ_k	-1.27	
$\Omega/\mu_k \cdot fm^2$	7.21	
$B(E 2, \frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^-)/e^2 fm^4$	17.0	
$B(M 1, \frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^-)/\mu_k^2$	1.58	$1.87 \pm .25$ (Aj 84)

Tabelle 4: Berechnete elektromagnetische Eigenschaften von ${}^7\text{Li}$ für die Wellenfunktionen WF 3 und WF 4

	WF 3	WF 4
rms/fm	2.46	2.40
r_c/fm	2.38	2.31
Q/efm^2	-4.19	-3.42
μ/μ_k	3.16	2.79
$\Omega/\mu_k \cdot fm^2$	-11.8	-10.8
$B(E 2, \frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^-)/e^2 \cdot fm^4$	11.3	5.54
$B(M 1, \frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^-)/\mu_k^2$	2.10	2.13

werden, wenn man den gebundenen Zustand von ${}^7\text{Li}$ (${}^7\text{Be}$) aus einer Überlagerung der Zweiclustern- ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}({}^3\text{He})$ -Struktur und einer Dreiclustern- ${}^6\text{Li} + n$ (p)-Struktur beschreibt. Diese Wellenfunktion heiße WF 4, ihre genaue Gestalt und ihre Parameter sind in Anhang 8 erläutert. Die mit der Funktion WF 4 berechneten Radien, Momente und B-Werte sind auch in Tab. 4 aufgelistet. Jetzt werden die elektrischen Eigenschaften leicht unterschätzt. Durch Weglassen des ${}^6\text{Li} + n$ -Anteils in der Wellenfunktion WF 4 vergrößern sich der mittlere quadratische Radius auf 2.45 fm, der Ladungsradius auf 2.37 fm und das Quadrupolmoment auf $-4.00 \text{ e}^2\text{fm}^2$. Dies ist der Beweis, daß die hinzugekommene ${}^6\text{Li} + n$ -Struktur die Radien und das Quadrupolmoment verkleinert.

Da das verwendete NN-Potential als effektives Potential zu betrachten ist, deren Strkeparameter nicht genau bekannt sind - man weiß, daß mit zunehmender Massenzahl die Spinbahnkraftverstrkt werden muß (St 77) -, ist zu vermuten, daß bei leichter Änderung der Stärke von Spinbahn- und Tensorkraft die elektrischen Eigenschaften gut wiedergegeben werden.

Der Grund für die Verwendung der Funktion WF 4 ist, daß diese Funktion die richtige Bindungsenergie relativ zur Schwelle hat, was für den Strahlungseinfang bei kleinen Energien sehr wichtig ist.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß schon recht einfache Clustermodellfunktionen die statischen Momente und elektromagnetischen Übergänge in ${}^7\text{Li}$ gut reproduzieren. Stellt man aber den Anspruch, auch auf die Asymptotik empfindliche Größen konsistent zu beschreiben, so muß mehr Aufwand getrieben werden und zur $\alpha + {}^3\text{H}$ -Struktur eine ${}^6\text{Li} + n$ -Struktur beigemischt werden. Dies wiederum eröffnet die Möglichkeit, die Parameter des Potentials besser festzulegen. Die relativ komplizierte Struktur der Wellenfunktion ist der Preis, der gezahlt werden muß, wenn man mit ein und demselben Potential auskommen will.

7.2 Die Strahlungseinfangreaktion $\alpha(^3\text{He}, \gamma)^7\text{Be}$

Die Radiative-Capture-Reaktion $\alpha + ^3\text{He} \rightarrow ^7\text{Be} + \gamma$ spielt in der Astrophysik eine entscheidende Rolle für die Produktion der hochenergetischen Bor-Sonnen-Neutrinos und damit für das kernphysikalische Verständnis des solaren Neutrino-Problems. Auf Einzelheiten soll hier nicht eingegangen werden, wir verweisen vielmehr auf die Literatur (Cl 68, Da 78, Ba 82a).

Wegen des solaren Neutrino-Problems gibt es gerade auch in jüngster Zeit eine Reihe von Messungen dieser Reaktion (Pa 63, Na 69, Kr 82, Vo 83, Ro 83, Os 82, Al 84), d. h. des astrophysikalischen S-Faktors bei möglichst niedrigen Energien.

Phänomenologisch wurde diese Reaktion mit dem sog. Direct-Capture-Modell berechnet (To 63, Ki 81, Wi 81), das nur die asymptotischen Teile der Wellenfunktionen berücksichtigt (da man ja an kleinen Energien interessiert ist) und nicht den Bereich der Kernkräfte. Diese Beschreibung liefert das richtige energetische Verhalten des S-Faktors $S(E)$, aber nicht den absoluten Wert $S(0)$. Eine weitere phänomenologische Beschreibung, basierend auf einem sog. Cluster-Modell freier Teilchen, wurde neuerdings von B. Buck et al (Bu 85) gegeben, wobei die Parameter des Modells so gewählt wurden, daß möglichst viele elektromagnetische Eigenschaften des Siebennukleonensystems reproduziert werden.

Pionierarbeit bei der mikroskopischen Beschreibung dieser Reaktion wurde von Kanada, Liu, Tang und Walliser geleistet (Li 81, Wa 83, Wa 84a), die ebenso wie Kajino und Arima (Ka 84) die Resonating-Group-Methode verwenden. In beiden Modellen wird aber das NN-Potential so gewählt, daß die für die Beschreibung des niederenergetischen Strahlungseinfangs relevanten Größen richtig wiedergegeben werden. Während Walliser et al. nur den E1-Einfang, der den Hauptbeitrag darstellt, betrachten, berechnen Kajino und Arima auch die um Größenordnungen kleineren E2-, M1-, M2- und E3-Beiträge. Beide Modelle benutzen für die Wellenfunktionen des Siebennukleonensystems ausschließlich die Clusterzerlegung $^4\text{He} + ^3\text{He}$.

In dieser Arbeit wird die Strahlungseinfangreaktion mit einem mikroskopischen Vielkanal-Resonating-Group-Modell untersucht, das auch die Berücksichtigung anderer energetisch höherliegender Clusterzerlegungen, wie z. B. ${}^6\text{Li} + p$, zuläßt. Damit kann der Einfluß geschlossener Kanäle auf den Fusionsquerschnitt untersucht werden. Des weiteren hat das verwendete Potential keine freien Parameter und ist dasselbe für alle betrachteten Kerne.

Zur Klärung der physikalischen Situation sei angemerkt, daß der Strahlungseinfang sowohl in den Grundzustand ($J^\pi = \frac{3}{2}^-$) als auch in den ersten angeregten Zustand ($J^\pi = \frac{1}{2}^-$) von ${}^7\text{Be}$ erfolgen kann (Fig. 7.2). Die Auswahlregeln für den dominierenden E1-Einfang bestimmen die zu berücksichtigenden Kanäle. Dies sind in der Notation ${}^{2S_L+1}L_{rel}J^\pi$ die Kanäle ${}^2S_{1/2}^+$, ${}^2D_{3/2}^+$ und ${}^2D_{5/2}^+$ für den Grundzustand, und ${}^2S_{1/2}^+$ und ${}^2D_{3/2}^+$ für den angeregten Zustand. Zum E2-Einfang tragen die Kanäle ${}^2P_{1/2}^-$, ${}^2P_{3/2}^-$, ${}^2F_{5/2}^-$ und ${}^2F_{7/2}^-$ für den Grundzustand bei, und ${}^2P_{3/2}^-$ und ${}^2F_{5/2}^-$ für den angeregten Zustand. Für M1-Einfang handelt es sich um ${}^2P_{1/2}^-$ und ${}^2P_{3/2}^-$.

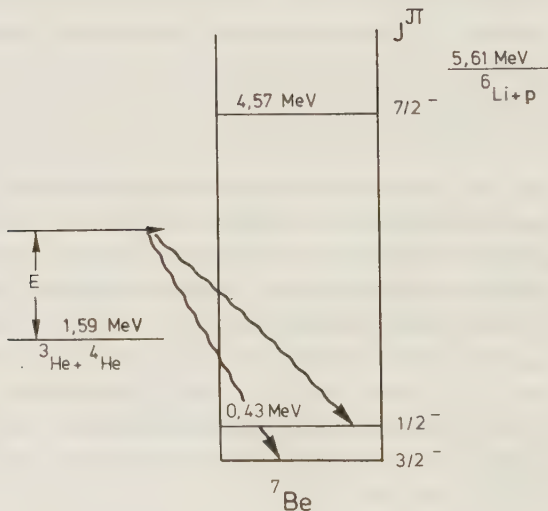


Fig. 7.2: Die tiefliegenden Zustände von ${}^7\text{Be}$ mit den Schwellen der Kanäle ${}^3\text{He} + {}^4\text{He}$ und ${}^6\text{Li} + p$ und Veranschaulichung des Strahlungseinfangs.

Im folgenden werden die Ergebnisse der zahlreichen Untersuchungen mitgeteilt, ohne immer alle Fakten mit Zahlenmaterial zu unterlegen. Zunächst gehen wir auf allgemeine Phänomene ein, ohne die verwendeten Funktionen zu spezifizieren.

- 1) Für kleine Energien erwartet man, daß sich die Reaktionspartner nicht zu nahe kommen und daher das Pauliprinzip keine große Rolle spielt. Ab etwa $R_0 = 5$ fm Relativabstand sollte der Antisymmetrisierer die Wellenfunktionen nicht mehr beeinflussen (Wa 85). Unter Vernachlässigung der von der Antisymmetrisierung stammenden nichtlokalen Terme (Wi 77) erhält man für den E1-S-Welleneinfangsquerschnitt aus Gl. (4.27)

$$\sigma(k, L=1, 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}^+ \rightarrow 3 \frac{1}{2}^-) \approx \frac{32\pi}{9} \frac{m k^3}{\hbar^2 K^3} e^2 \left| \frac{2}{7} \int_{R_0}^{\infty} dR f_S(R) \cdot R \cdot f_B(R) \right|^2. \quad (7.3)$$

Hierbei ist $f_S(R)$ der radiale Anteil der asymptotischen Streufunktion:

$$f_S(R) = \cos \delta_0 \cdot F_0(R) + \sin \delta_0 \cdot G_0(R)$$

mit der Streuphase δ_0 und den Coulombfunktionen F_0 und G_0 und $f_B(R)$ der Radialteil der Bound-State-Funktion von ${}^7\text{Be}$ ($f_B(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} R^2$). Der Operator $O_{ST}(E1)$ liefert auf der Relativkoordinate $\frac{2}{7} R$.

Der Wirkungsquerschnitt, berechnet mit Gl. (7.3), beträgt etwa 90 % des exakten RGM-Wirkungsquerschnittes (Wa 85).

Der Integrand von (Gl. 7.3) gibt die Information, von welchem Relativabstand der Hauptbeitrag zum Matrixelement kommt. Dieser Integrand mit den asymptotischen Formen von f_S und f_B (siehe 2) und 3)) ist in Fig. 7.3 für $E = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} = .1$ MeV gezeichnet. Es werden also im Gegensatz zur herkömmlichen Kernphysikrechnung die Wellenfunktionen im Bereich zwischen ca. 5 und 30 fm benötigt. Dies ist die Folge der langreichweitigen elektromagnetischen Operatoren.

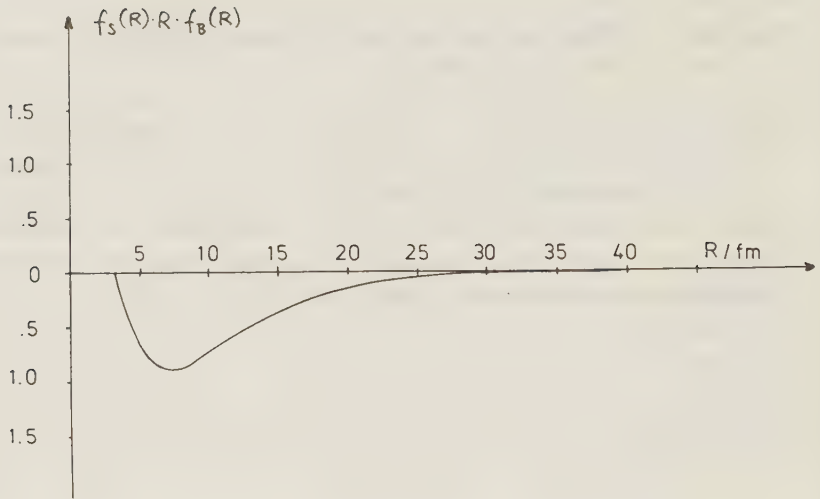


Fig. 7.3: Der Integrand in der lokalen Näherung (Gl. 7.3) mit den asymptotischen Wellenfunktionen in willkürlichen Einheiten

- 2) Da die Streufunktion nach quadratintegrablen Funktionen vom Gaußtyp entwickelt wird (Gl. 5.10'), um den Innenbereich, d. h. den Bereich der Reichweite der Kernkraft, richtig zu beschreiben, und zur Berechnung der S-Matrix aber für die langreichweitigen Anteile der Matrixelemente die asymptotischen Wellenfunktionen verwendet werden (Ho 84b), ist im Falle der elektromagnetischen Operatoren darauf zu achten, daß die Approximation der Streufunktion durch die quadratintegrablen Funktionen im relevanten Bereich, also bei 0.1 MeV bis ca. 30 fm gut genug ist.

Üblicherweise (Ho 83) wurden in den Entwicklungsfunktionen $N = 15$ Weiten δ_i ($i = 1, \dots, 15$) verwendet:

$$\begin{aligned} &5., 2.5, 1.7, 1.3, .9, .55, .35, .2, .1, .05, .025, \\ &.0125, .007, .004, .0015 \end{aligned} \quad (\text{Satz 1})$$

Entsprechend der Entwicklung (Gl. 5.10') enthält man damit für das Matrixelement des Operators $\mathcal{O}$ zwischen der Streufunktion $|\varphi_{\alpha L \delta_i}\rangle$ und dem ge-

bundenen Zustand $|\alpha'J'\rangle$:

$$\langle \varphi_{\alpha L S J} || A || \alpha' J' \rangle = \sum_{m=1}^N c_m M_m ,$$

wobei M_m die Matricelemente mit den Entwicklungsfunktionen sind. Dabei stellte es sich heraus, daß diese 15 Entwicklungsfunktionen nicht langreichweitig genug sind, um die Streufunktion auf dem Bereich zu approximieren, der durch den Abfall der gebundenen Wellenfunktionen vorgegeben wird. Deswegen wird hier zur Berechnung der Matricelemente die Streufunktion durch $N = 20$ Funktion approximiert mit den Abfallparametern $\delta_i (i = 1, \dots, 20)$:

$$\begin{aligned} &5., 1.7, .7, .35, .15, .07, .04, .025, .015, .01, \\ &.007, .005, .0035, .0025, .0015, .0010, .0007, \quad (\text{Satz 2}) \\ &.0004, .0002, .0001 \end{aligned}$$

Das Verhalten der Matricelemente $c_m M_m$ und die Nichtkonvergenz bzw. Konvergenz von $\sum_{i=1}^m c_i M_i$ für beide Sätze von Relativweiten wird in Tab.5 gezeigt (in willkürlichen Einheiten) für $E = .1$ MeV.

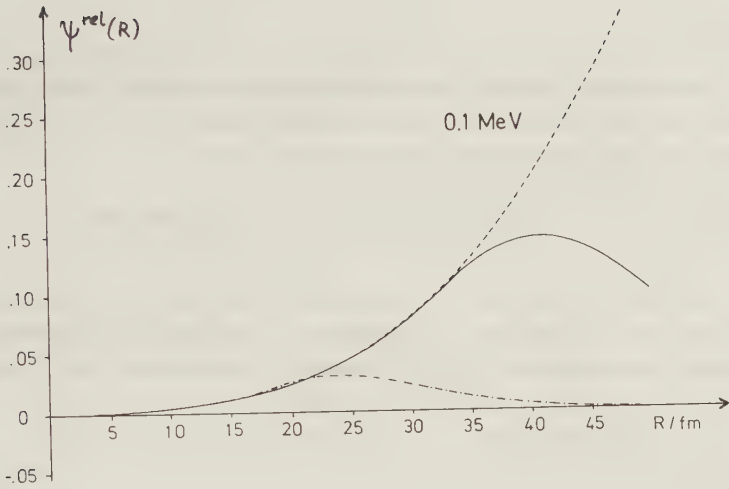
Während offensichtlich die Entwicklung nach dem Satz 1 von Relativparametern nicht zur Konvergenz führt, ist sie jedoch gerade ausreichend um näherungsweise das richtige Ergebnis zu liefern.

Die Güte der Approximation der Streufunktion kann Fig. 7.4 entnommen werden. Die durchgezogene Kurve ist die mit Satz 2 approximierte, die strichpunktierte die mit Satz 1 approximierte und die gestrichelte die exakte Relativfunktion (5.10). Vermutlich läßt sich die Zahl der erforderlichen Entwicklungsfunktionen reduzieren, falls die Weiten richtig, d. h. klein genug, gewählt werden, so daß bei aufwendigen Systemen Rechenzeit gespart werden kann.

Weiterhin ist hinsichtlich der Streufunktion wichtig, daß die Phase richtig wiedergegeben wird. Dieser Punkt wird unter 6) näher erläutert.

Tabelle 5: Nichtkonvergenz bzw. Konvergenz der Matrixelemente bei Verwendung von Satz 1 bzw. Satz 2 für die Relativweiten der Streufunktion

	Satz 1		Satz 2	
m	$c_m M_m$	$\sum_{i=1}^m c_i M_i$	$c_m M_m$	$\sum_{i=1}^m c_i M_i$
1	.007	.007	.004	.004
2	.047	.054	-.008	-.004
3	-.715	-.661	.027	.023
4	1.71	1.05	-.013	.010
5	-1.92	-.871	.049	.059
6	1.51	.639	-.909	-.850
7	-.694	-.055	8.25	7.40
8	.305	.250	-40.8	-33.4
9	-2.64	-2.39	242.	208.6
10	13.4	11.01	-1095.	-886.
11	-48.4	-37.4	3278.	2392.
12	158.	120.	-6312.	-3920.
13	-310.	-189.	8488.	4568.
14	283.	93.6	-6518.	-1950.
15	-98.	-4.39	2183.	232.6
16			+684.	917.
17			-970.	-53.4
18			51.9	-1.50
19			-2.91	-4.41
20			.210	-4.20



TPER-3059-85

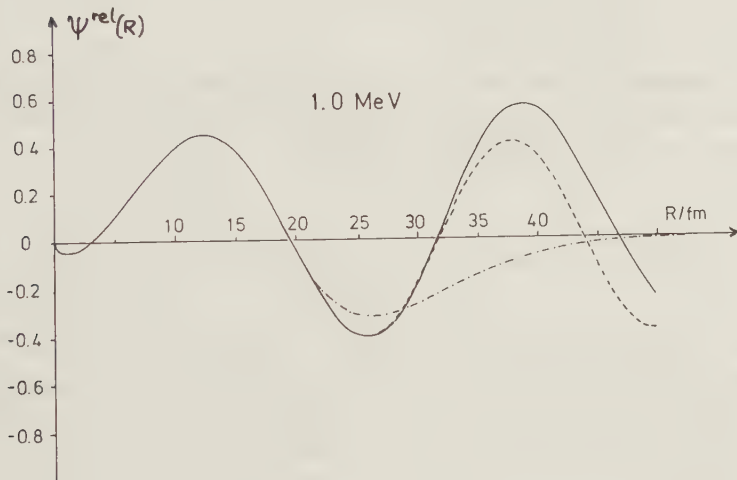


Fig. 7.4: Radialanteile der Streufunktion;
durchgezogen: mit 20 Weiten approximiert (Satz 2);
strichpunktiert: mit 15 Weiten approximiert (Satz 1);
gestrichelt: exakt.
(a) $E = 0.1 \text{ MeV}$; (b) $E = 1.0 \text{ MeV}$

- 3) Für die Energieabhängigkeit des S-Faktors bei sehr kleinen Energien ist die asymptotische Form der Wellenfunktion des gebundenen Zustands entscheidend. Der Radialanteil dieser Funktion ist für große Relativabstände durch eine Whittakerfunktion gegeben (Ab 65, Wa 84a):

$$f_B(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} C_{Jl} \sqrt{2\kappa_{Jl}} W_{-\eta_{Jl}, l + \frac{1}{2}}(2\kappa_{Jl}R)$$

Für ${}^7\text{Be}$ ist $l = 1$ und $J = \frac{3}{2}$ für den Grundzustand und $J = \frac{1}{2}$ für den ersten angeregten Zustand. Die Konstante κ_{Jl} ist durch die reduzierte Masse m und die Energie E_{Jl} des gebundenen Zustands unter der zugehörigen Schwelle (Clusterseparationsenergie) gegeben:

$$\kappa_{Jl} = \sqrt{2m E_{Jl} / \hbar^2}$$

Der Sommerfeldparameter η_{Jl} ist definiert durch

$$\eta_{Jl} = \frac{Z_1 Z_2 e^2 m}{\hbar^2 \kappa_{Jl}}$$

Die asymptotische Konstante C_{Jl} wird durch die Wellenfunktion im Innenbereich festgelegt. Für große Werte von R kann die Reihenentwicklung der Whittakerfunktion verwendet werden (Bu 53):

$$W_{-\eta, 3/2}(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} e^{-z/2} z^{-\eta} \left\{ 1 + \frac{(2+\eta)(-1+\eta)}{-z} + \frac{(2+\eta)(3+\eta)(-1+\eta)\eta}{2(-z)^2} + O((-z)^{-3}) \right\}$$

Der Radialanteil der Clusterwellenfunktion des gebundenen Zustands ist nun aber durch eine oder mehrere Gaußfunktionen gegeben, die schneller mit wachsendem Relativabstand abfallen als eine Whittakerfunktion. Benutzt man herkömmliche Bound-State-Funktionen, deren Relativanteil aus einer Überlagerung von wenigen (eine bis drei) Gaußfunktionen besteht, so ist dies in der Tat der Fall. In Fig. 7.5 ist das asymptotische Verhalten des Radialanteils einer Relativfunktion mit zu schnellem Abfall (gestrichelt) und näherungsweise richtigem Abfall (durchgezogene Linie) gezeigt.

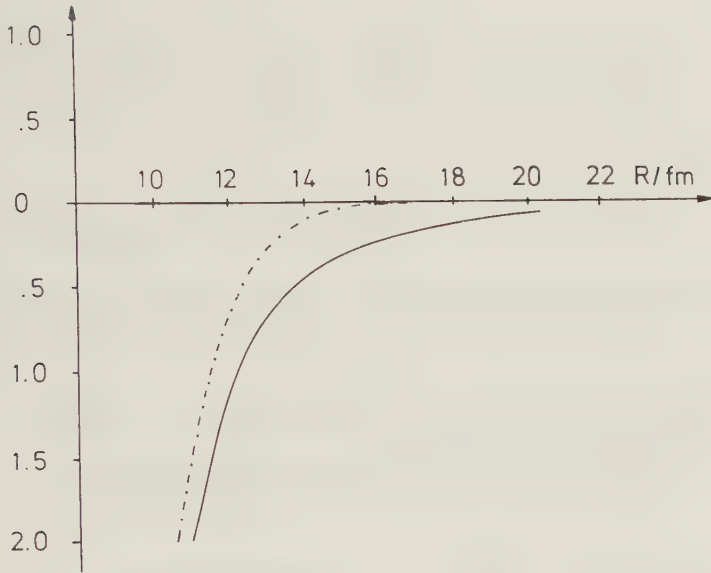


Fig. 7.5: Radialanteile der Relativfunktionen mit zu schnellm Abfall (gestrichelt) und näherungsweise richtiger Asymptotik (durchgezogen) in willkürlichen Einheiten

Die Folge ist, daß der astrophysikalische S-Faktor bei kleinen Energien ($E < 0.5$ MeV) eine positive Steigung hat ($\frac{dS}{dE} > 0$) im Gegensatz zu den experimentellen Daten. In Fig. 7.6 ist der S-Faktor für den Einfang in den Grundzustand für die in Fig. 7.5 gezeigte zu schnell abfallende Funktion dargestellt, zum Vergleich auch der S-Faktor für eine Wellenfunktion mit der richtigen Asymptotik. Außerdem zeigt Fig. 7.6 den mit der Wellenfunktion WF 1 (s. Anhang 8) berechneten S-Faktor, welcher für diese aus nur einer Gaußfunktion bestehenden Funktion nicht nur mit der Energie ansteigt, sondern auch um etwa eine Größenordnung zu klein ist.

Deshalb wird zur Berechnung des S-Faktors eine Bound-State-Funktion der näherungsweisen richtigen Asymptotik mit folgendem Verfahren gewonnen: Der Radialanteil der mit dem Ritzschen Variationsprinzip gewonnenen Wellenfunktion wird um eine oder zwei Gaußfunktionen mit genügend kleinem Abfallparameter erweitert.

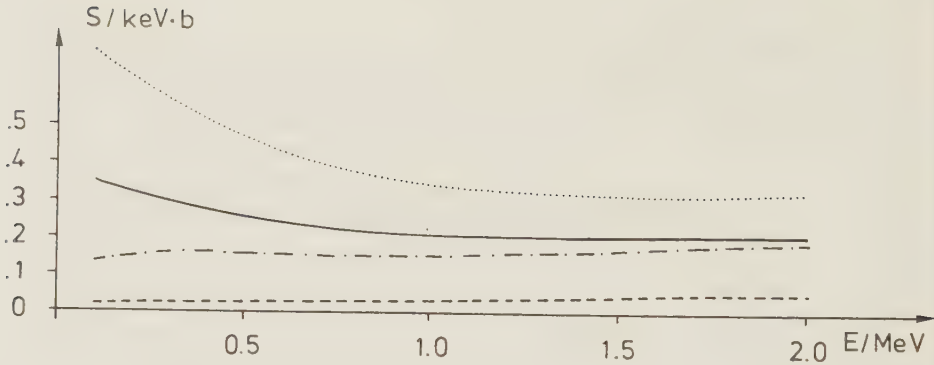


Fig. 7.6: S-Faktor für den Einfang in den Grundzustand für verschiedene Bound-State-Wellenfunktionen.

Durchgezogene Linie: für WF 4 mit richtiger Asymptotik,
strichpunktliert: für die in Fig. 7.5 gezeigte zu schnell abfallende Funktion,
gestrichelt: für WF 1 mit nur einer Gaußfunktion in der Relativfunktion,
punktliert: für WF 3 mit richtiger Asymptotik, aber zu wenig Bindung.

In einer Bindungsrechnung werden dann die Überlagerungskoeffizienten der Gaußfunktionen bestimmt, wobei die Koeffizienten der schon vorhandenen Gaußfunktionen sich minimal ändern (weniger als 3 %) und die der neu hinzugefügten Gaußfunktionen sehr klein sind. Deswegen ändert sich auch die Bindungsenergie kaum (≈ 10 keV). (Die Matrixelemente des Hamiltonoperators werden hauptsächlich von den kurzreichweitigen Gaußfunktionen mit den großen Koeffizienten beeinflusst.) Der radiale Abfall wird dadurch aber entscheidend verändert und der einer Whittakerfunktion angenähert.

Weiterhin ist darauf zu achten, daß die Clusterseparationsenergie E_{J1} , also die Bindungsenergie relativ zur Schwelle, korrekt ist, denn E_{J1} bestimmt die Form der Whittakerfunktion. Hierauf ist insbesondere der absolute Wert des Wirkungsquerschnittes bzw. des S-Faktors und damit auch $S(0)$ empfindlich.

Die Wellenfunktion WF 3 für den Grundzustand von ${}^7\text{Be}$ z. B., deren Relativfunktion eine Überlagerung von vier Gaußfunktionen ist und näherungsweise das richtige asymptotische Verhalten einer Whittakerfunktion hat, liefert die negative Steigung, aber einen zu großen Wert des S-Faktors (gepunktete Kurve in Fig. 7.6). Ursache hierfür ist die zu kleine Bindungsenergie relativ zur Schwelle. Der angeregte $\frac{1}{2}^-$ -Zustand von ${}^7\text{Be}$ wäre für die Weiteparameter von WF 3 sogar ungebunden.

Innerhalb des in dieser Arbeit verwendeten Modells, d. h. mit dem hier verwendeten Potential gelingt es nicht, eine Zweicluster ($\alpha + {}^3\text{He}$)-Wellenfunktion für ${}^7\text{Be}$ zu finden, welche die genügend hohe Clusterseparationsenergie besitzt. Deshalb muß für die richtige Wiedergabe des S-Faktors bei kleinen Energien eine Zweistrukturwellenfunktion für ${}^7\text{Be}$ benutzt werden. Zusammenfassend muß die Wellenfunktion des gebundenen Zustands also sowohl das richtige asymptotische Verhalten als auch die richtige Energie besitzen.

- 4) Zunächst werden die Ergebnisse von Kajino und Arima (Ka 84a) und Kanada, Liu und Tang (Li 81) nachvollzogen (abgekürzt KA und KLT). Beide Gruppen verwenden ein angepaßtes Potential, bestehend aus Zentral- und Spinbahnanteil, welches die Clusterseparationsenergien der beiden ${}^7\text{Be}$ -Bindungszustände und die Streuphasen für die ${}^4\text{He} + {}^3\text{He}$ -Streuung reproduziert. In beiden Fällen werden für Streu- und Bindungsfunktion nur eine Clusterzerlegung mit dem gleichen ${}^4\text{He}$ bzw. ${}^3\text{He}$ im $(1s)^4$ bzw. $(1s)^3$ -Zustand verwendet.

In Fig. 7.7 ist der mit den KA-Daten berechnete E1-, E2- und M1-Einfangsquerschnitt zusammen mit experimentellen Meßpunkten, in Fig. 7.8 der S-Faktor (durchgezogene Linie) zusammen mit dem Ergebnis von (Ka 84b) (gestrichelt) dargestellt. Die Abweichungen zu Ref. (Ka 84a) beruhen auf den unterschiedlichen Methoden, die Schrödingergleichung zu lösen und bei kleinen Energien im unterschiedlichen Ansatz für die Bound-State-Funktionen. Für den Radialanteil dieser Funktion genügt hier eine Überlagerung von fünf Gaußfunktionen, um die experimentellen Daten zu reproduzieren. Bei kleinen Energien allerdings ($E < 0.5$ MeV) ist eine Abweichung von KA zu erkennen, da die mit Gaußfunktionen parametrisierte Wellenfunktion für große Abstände doch stärker abfällt als die Whittakerfunktion. Dies könnte vermutlich durch Verwendung von noch mehr Gaußfunktionen mit kleinen Weiten verhindert werden.



Fig. 7.7: Mit den Daten von (Ka 84a) berechneter E1-, E2- und M1-Wirkungsquerschnitt. Die experimentellen Daten sind: $\times$ (Ro 83), $\circ$ (Na 69), $\square$ (Pa 63), $\blacktriangle$ (Os 82)
(---- : Einfang in den Grundzustand, — : Einfang in den Grundzustand und ersten angeregten Zustand von ^7Be).

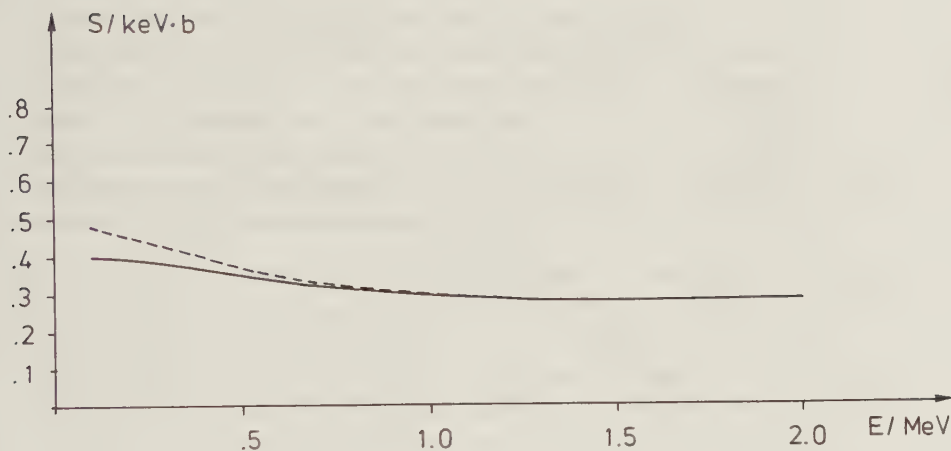


Fig. 7.8: Vergleich des mit den KA-Daten reproduzierten S-Faktors (durchgezogene Kurve) mit Ref. (Ka 84a) (gestrichelt).

Ohne die Ergebnisse im Detail zu zeigen, sei hier mitgeteilt, daß es auch gelingt, die Resultate von KLT zu reproduzieren (Li 81), die allerdings verglichen mit dem Experiment etwa 30 % zu groß sind. Die Übereinstimmung mit dem Experiment gelingt erst bei Verwendung komplizierterer Wellenfunktionen (Wa 84). Dies macht die Abhängigkeit vom verwendeten Potential deutlich und ist in Einklang mit Ref. (Ka 84c).

- 5) Um im Rahmen des hier verwendeten Modells die experimentellen Datenpunkte beschreiben zu können, muß in der Wellenfunktion des gebundenen ${}^7\text{Be}$ -Zustandes der Zweiclusterfunktion $\alpha + {}^3\text{He}$ die Dreiclusterfunktion ${}^6\text{Li} + p$ beigemischt werden. Erst damit erhält man relativ zur $\alpha + {}^3\text{He}$ -Schwelle genügend Bindungsenergie. Eine solche Wellenfunktion ist WF 4 (s. Anhang 8). Die vier Gaußfunktionen in der Relativbewegung der ersten Struktur ($\alpha + {}^3\text{He}$) sorgen für das approximative asymptotische Verhalten einer Whittakerfunktion. Die Relativfunktion der ersten Struktur ($\alpha + {}^3\text{He}$) ist in Fig. 7.9a gezeigt. (Diese, wie alle in dieser Arbeit gezeigten Relativfunktionen sollten wegen der Nicht-

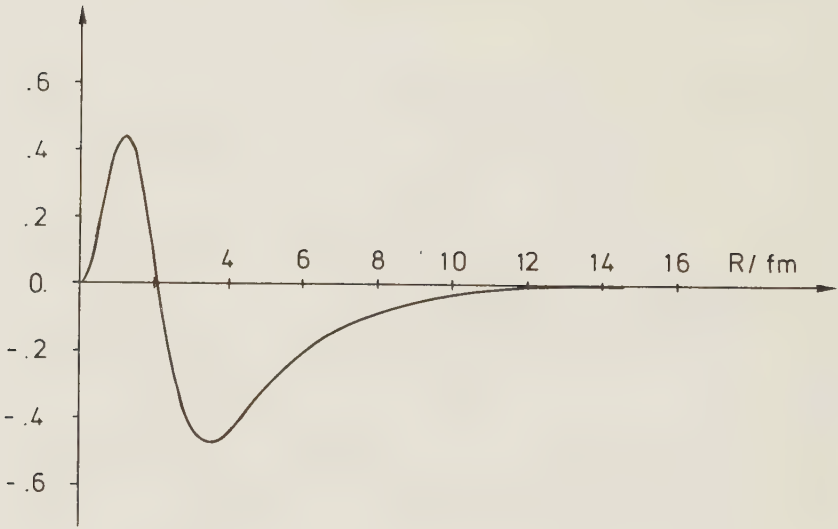


Fig. 7.9 a: Die Relativfunktion der Wellenfunktion WF 4 in der Struktur $\alpha + {}^3\text{He}$.

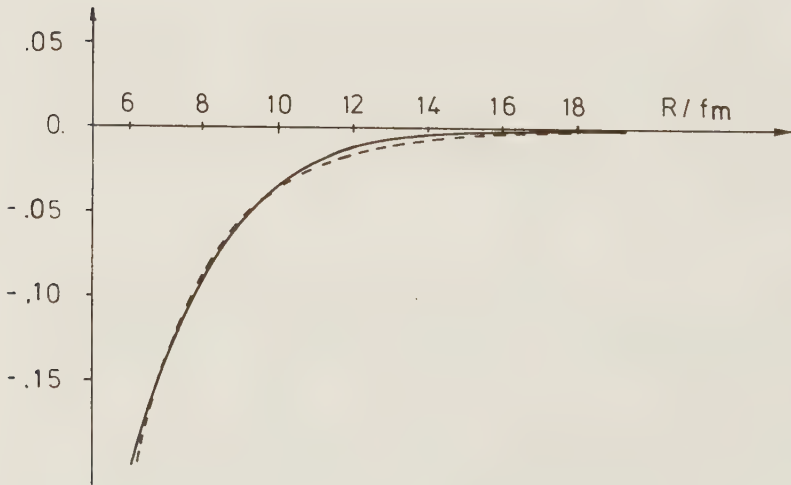


Fig. 7.9 b: Vergleich des asymptotischen Verhaltens von WF 4 (—) mit der Whittakerfunktion ($C_{3/2,1} = -5.0$) (----).

orthogonalität der Clusterwellenfunktionen und wegen der Effekte der Antisymmetrisierung für kleine Relativabstände nicht als Wellenfunktionen wahrscheinlichkeits-theoretisch interpretiert werden (Wa 84b). Für größere Abstände ($R \gtrsim 5$ fm) gehen diese Funktionen jedoch in die Wellenfunktionen über.) Das asymptotische Verhalten von WF 4 wird in Fig. 7.9 b vergrößert (durchgezogene Kurve) dargestellt und mit einer Whittakerfunktion (gestrichelt) verglichen.

Die Streufunktion besteht nur aus der Zerlegung $\alpha + {}^3\text{He}$, wobei das α -Teilchen die interne Weite $\beta_\alpha = 0.2846$ besitzt und ${}^3\text{He}$ aus einer Überlagerung von zwei Gaußfunktionen besteht mit Weiten $\beta_{{}^3\text{He},1} = 0.2760$ und $\beta_{{}^3\text{He},2} = 0.1057$ und Überlagerungskoeffizienten $c_1 = 0.1500742$ und $c_2 = 0.03119584$. Die gleiche interne Wellenfunktion besitzen auch die Bound-State-Funktionen. Die Relativfunktion besteht aus einer Überlagerung von 20 quadratintegrablen Funktionen mit den Weiteparametern des 2. Satzes (s. 2), deren Überlagerungskoeffizienten in einer Streurechnung zur Bestimmung der Reaktanzmatrix nach dem Kohn-Hulthen-Variations-Prinzip bestimmt wurden (s. Kap. 5).

Das Ergebnis für den dominierenden E1-Einfangquerschnitt ist zusammen mit den Meßpunkten in Fig. 7.10 gezeigt. Die gestrichelte Kurve ist der Einfang in den Grundzustand, die durchgehende Kurve der gesamte Wirkungsquerschnitt. Die Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung ist ausgezeichnet. Der gesamte S-Faktor wird in Fig. 7.11 mit dem Experiment verglichen. Auch dieses Resultat ist mit den Meßpunkten verträglich. In Fig. 7.12 wird gezeigt, daß auch das Verzweigungsverhältnis, d. h.

$$R(E) := \frac{\sum_{\alpha} \sigma(E, \alpha S_c \rightarrow {}^7\text{Be}^*(1_2^-))}{\sum_{\alpha} \sigma(E, \alpha S_c \rightarrow {}^7\text{Be}^{g.s.}(3_2^-))}$$

(s. Gl. (4.29)) mit den experimentellen Daten übereinstimmt.

Schließlich kann Fig. 7.13 der relative Beitrag der einzelnen Partialwellen entnommen werden, und zwar ist in Fig. 7.13 a

$$V_1 := \frac{\sigma(E, \alpha S_c \rightarrow {}^7\text{Be}^{g.s.}(3_2^-))}{\sum_{\alpha} \sigma(E, \alpha S_c \rightarrow {}^7\text{Be}^{g.s.}(3_2^-))} \quad \text{und in Fig. 7.13 b}$$

$$V_2 := \frac{\sigma(E, \alpha S_c \rightarrow {}^7\text{Be}^*(1_2^-))}{\sum_{\alpha} \sigma(E, \alpha S_c \rightarrow {}^7\text{Be}^*(1_2^-))} \quad \text{aufgetragen.}$$

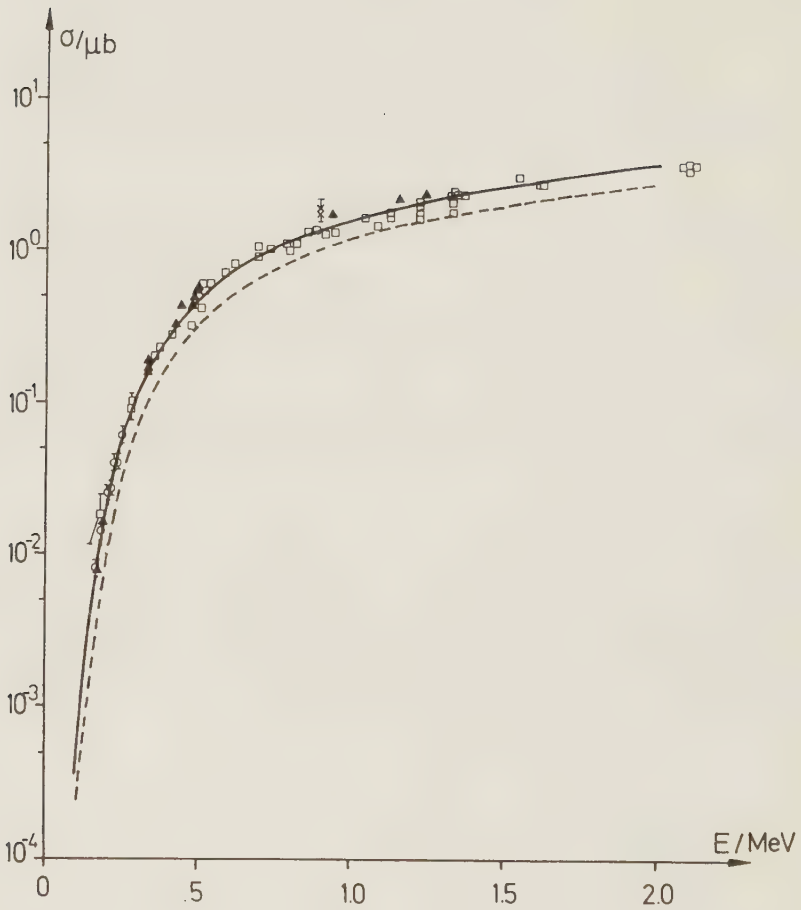


Fig. 7.10: E1-Einfangquerschnitt in den Grundzustand (----) und in den Grund- und angeregten Zustand (—) von ${}^7\text{Be}$. Die Datenpunkte sind die gleichen wie in Fig. 7.7.

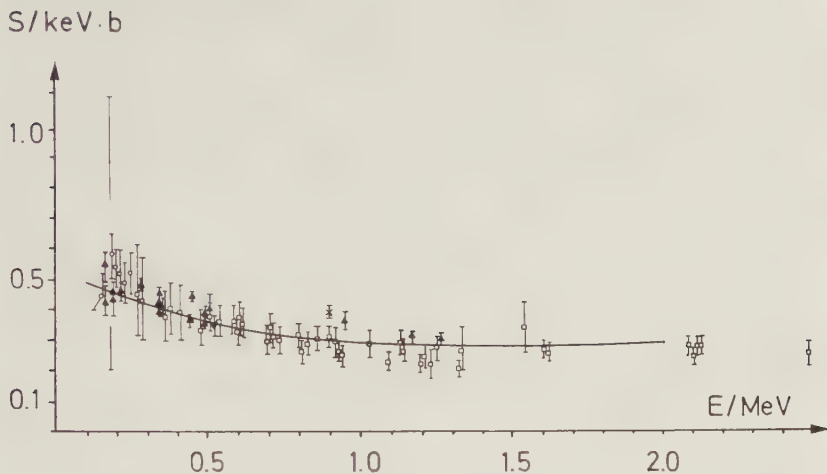


Fig. 7.11: Vergleich des S-Faktors mit den Meßwerten.
Symbole der Datenpunkte wie Fig. 7.7

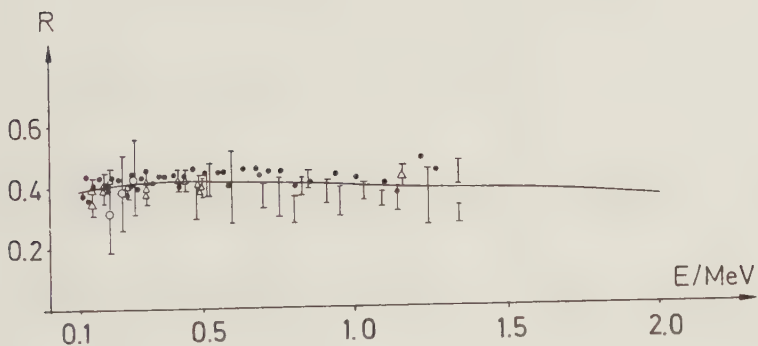


Fig. 7.12: Vergleich des berechneten Verzweigungsverhältnisses R mit den Daten. Die Symbole für die Meßpunkte sind die gleichen bis auf:
□ (Pa 63) und ● (Kr 82).

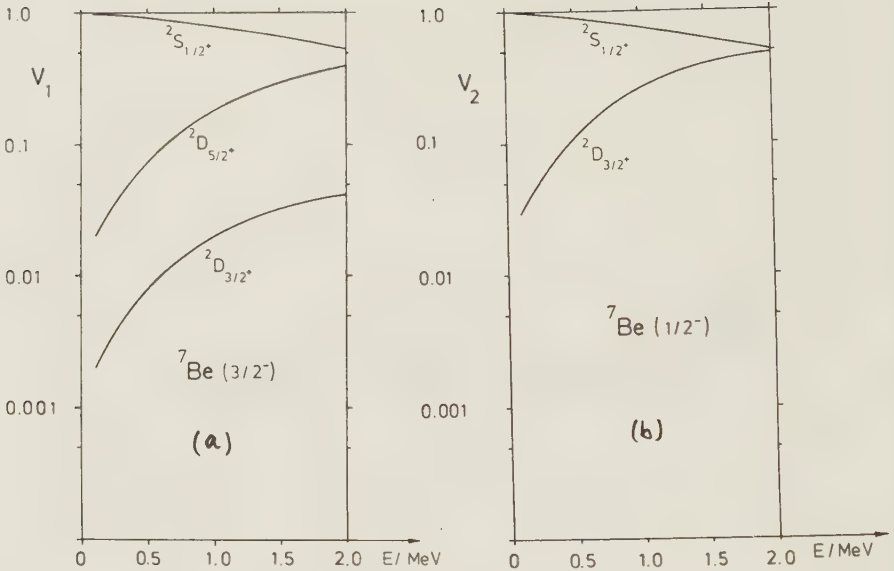


Fig. 7.13: Relativer Beitrag der einzelnen Partialwellen zum Einfang in den Grundzustand (a) und in den angeregten Zustand (b). Die Kurven sind so normiert, daß der Gesamtbeitrag 1 ist.

Wie man erwartet, kommt bei kleinen Energien der Hauptbeitrag von der S-Welle. Bei höheren Energien dürfen die D-Wellen jedoch nicht vernachlässigt werden.

Das Modell ist also in der Lage, die Observablen der Strahlungseinfangreaktion ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ in Übereinstimmung mit den experimentellen Daten zu berechnen.

- 6) Um den Einfluß anderer Strukturen in der Streufunktion, d. h. geschlossener Kanäle zu studieren, berechnen wir den E1-Wirkungsquerschnitt und S-Faktor mit einer Streufunktion, die außer den offenen $\alpha + {}^3\text{He}$ -Kanälen ${}^2\text{S}_{1/2}^+$, ${}^2\text{D}_{3/2}^+$ und ${}^2\text{D}_{5/2}^+$ auch die geschlossenen ${}^6\text{Li} + \text{p}$ Kanäle ${}^2\text{S}_{1/2}^+$, ${}^4\text{D}_{1/2}^+$, ${}^4\text{S}_{3/2}^+$, ${}^2\text{D}_{3/2}^+$, ${}^4\text{D}_{3/2}^+$, ${}^2\text{D}_{5/2}^+$ und ${}^4\text{D}_{5/2}^+$ enthält. Hier kommt nun aber die Abhängigkeit des S-Faktors von der Streuphase zum Vorschein.

Diese Zweistrukturstreufunktion hat bis 1 MeV eine leicht attraktive $\alpha + {}^3\text{He} - {}^2\text{S}_{1/2}$ -Streuphase (Fig. 7.14, gestrichelte Kurve), um erst bei höheren Energien repulsiv zu werden. Die Folge ist, daß der S-Faktor zu groß wird und sogar einen leichten "Bump" aufzeigt (Fig. 7.15, gestrichelte Kurve). Verwenden wir eine frühere (Ho 83) Zweistrukturstreufunktion, die diesen Effekt nicht zeigt (Fig. 7.14, strichpunktiert), deren Phase aber nicht so repulsiv ist wie die der Einstrukturstreufunktion (Fig. 7.14, durchgezogene Kurve), so wird der S-Faktor nicht mehr so drastisch überschätzt (Fig. 7.15, strichpunktiert), ist aber immer noch größer als der mit der Einstrukturstreufunktion berechnete (Fig. 7.15, durchgezogene Kurve).

Daraus läßt sich schließen, daß die Berücksichtigung geschlossener Kanäle, sofern sie die Streuphasen unverändert lassen, auch den S-Faktor bei diesen niedrigen Energien nicht ändern, höchstens aber vergrößern.

Im Hinblick auf das solare Neutrinoproblem bestätigen auch mikroskopische Vielkanalrechnungen im wesentlichen die experimentellen Daten und lassen auch bei noch niedrigeren Energien keinen kleineren S-Faktor erwarten als Einkanalrechnungen.

Der Effekt einer zunächst attraktiven Phase ist eine Eigenschaft des verwendeten Potentials, welches vermutlich etwas zu langreichweitig und attraktiv ist. Er ist wohlbekannt und tritt auch bei der Dreistrukturrechnung von (Ho 83) und bei anderen Rechnungen auf. Allerdings erlaubt das Experiment (Ch 71) keine Entscheidung zwischen der Einstruktur- und der Zweistrukturstreufunktion von (Ho 83).

- 7) Für die Berechnung der um Größenordnungen kleineren E2- und M1-Einfänge werden Streufunktionen mit negativer Parität benötigt. Da aber das verwendete Potential in der $\alpha + {}^3\text{He}$ -Struktur allein keinen gebundenen $\frac{1}{2}^-$ -Zustand liefert (s. 3), taucht dieser Zustand in der Einstrukturstreurechnung als schmale Resonanz zwischen 0.3 und 0.4 MeV auf. Aufgrund der Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts bzw. des S-Faktors von der Streuphase erhält man damit ein sinnloses Resultat. Hier wäre also unbedingt eine Zweistrukturrechnung mit repulsiver ${}^2\text{P}_{1/2}$ -Phase nötig. Aufgrund der untergeordneten Bedeutung bei diesen kleinen Energien unterlassen wir aber die Berechnung des E2- und M1-Einfangs.

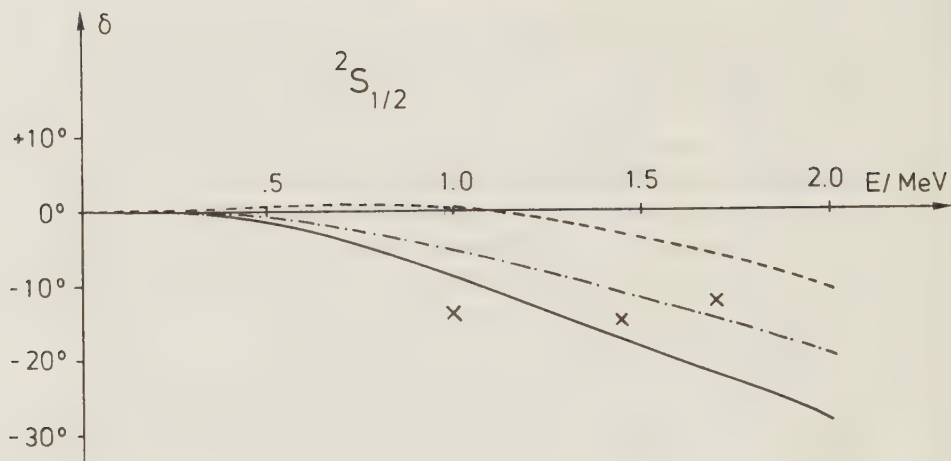


Fig. 7.14: Die $\alpha + {}^3\text{He} - {}^2S_{1/2}$ -Streuphase für die im Text beschriebene Zweistrukturstreufunktion (----), die Zweistrukturstreufunktion von (Ho 83) (-·-·-·-) und die Einstrukturfunktion (—). Die Kreuze sind experimentelle Daten (Ch 71).

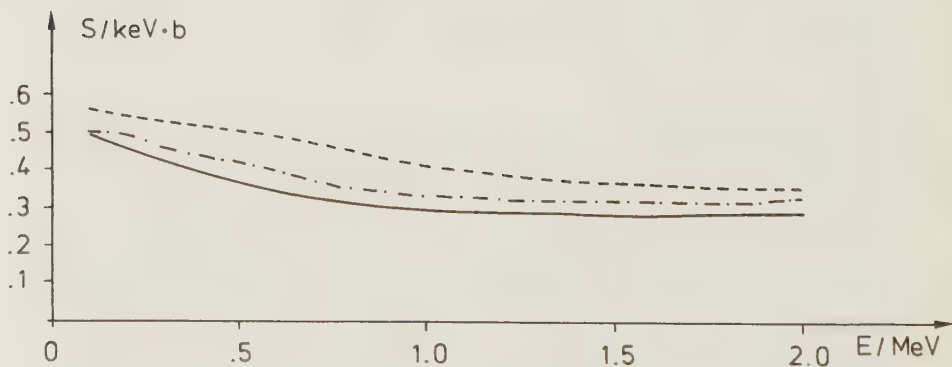


Fig. 7.15: Der mit den Streufunktionen von Fig. 7.14 berechnete S-Faktor. die durchgezogene Kurve ist die gleiche wie in Fig. 7.11.

- 8) Für Präzisionsaussagen über den S-Faktor bei noch kleineren Energien ist eine bessere Anpassung der Relativfunktion des gebundenen ^7Be -Zustandes an die Whittakerfunktion notwendig.

Dies könnte mit einem Fit der Whittakerfunktion durch eine Überlagerung langreichweitiger Gaußfunktionen geschehen. Hierbei ist zu bedenken, daß die so erhaltene Bound-State-Funktion nicht mehr Eigenfunktion des Hamiltonoperators wäre, da die Überlagerungskoeffizienten der langreichweitigen Gäuße nicht mehr durch die Diagonalisierung des Hamiltonians bestimmt wären, sondern durch den Fit.

Eine andere Möglichkeit wäre, vom Übergangsmatrixelement das ab einem bestimmten Abschneideradius mit Gaußfunktionen berechnete Integral in der lokalen Näherung (Gl. (7.3)) zu subtrahieren und das mit der Whittakerfunktion berechnete dafür zu addieren.

Dies muß jedoch zukünftigen Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Falls also die Bindungsenergie und das asymptotische Verhalten des gebundenen Zustands und die Streuphasen bei kleinen Energien korrekt wiedergegeben werden, läßt sich im Rahmen der Refined-Resonating-Group-Methode die Strahlungseinfangreaktion gut beschreiben. Jedoch werden bei sehr kleinen Energien ($E < 0.1 \text{ MeV}$) die technischen Schwierigkeiten wegen des Ansatzes der Bound-State-Funktion als Überlagerung von Gaußfunktionen größer. Trotzdem sollte eine Extrapolation auf die Energie $E = 0$ möglich sein.

7.3 Die Polarisierbarkeit von ${}^7\text{Li}$

- 1) Wir beginnen mit der Diskussion der Tensorstärke $\tau_{i \rightarrow f}$ der Polarisierbarkeit (Gl. (4.34)) in der sog. Closure-Approximation. Hierbei nimmt man an, daß alle Zustände, die virtuell mit dem Dipoloperator angeregt werden, bei der Energie E_D entartet sind. Sollte es sich um die eventuell beim Kern ${}^7\text{Li}$ nicht vorhandene Dipolriesenresonanz handeln, so ist E_D durch die empirische Beziehung (Ma 79)

$$E_D \approx (40 \cdot A^{-1/3} + 7.5) \text{ MeV}$$

gegeben. Für ${}^7\text{Li}$ bedeutet dies

$$E_D \approx 28.4 \text{ MeV.}$$

Da der angeregte $\frac{1}{2}^-$ -Zustand von ${}^7\text{Li}$ eine sehr ähnliche Struktur wie der Grundzustand hat, beschränken wir uns auf die Diskussion von $\tau_{11} := \tau_{i \rightarrow i}$.

Die Gleichung (4.36a) ergibt dann für die Größe $S_{i \rightarrow i}(\epsilon_1)$ mit der Bound-State-Wellenfunktion WF 1 (s. Anhang 8):

$$S_{i \rightarrow i}(\epsilon_1) = -0.0023 \text{ e}^2 \text{ fm}^2 / \text{MeV}.$$

Daraus folgt für τ_{11} über Gleichung (4.34a):

$$\tau_{11} = \tau_{11}(S(\epsilon_1)) = -0.017 \text{ fm}^3. \quad (7.4)$$

Dieser Wert ist die Folge einer weitgehenden Kancellierung von Einteilchen- und Zweiteilchenanteil.

Andererseits kann τ_{11} auch mittels der Polarisierbarkeit α (Gl. (4.36b)) und des Deformationsparameters α_{20} (Gl. (4.33)) berechnet werden. Der Zusammenhang mit τ_{11} ist durch Gl. (4.34b) gegeben. Die Wellenfunktion WF 1 liefert

$$\tau_{11} = \tau_{11}(\alpha) = -0.11 \text{ fm}^3. \quad (7.5)$$

Da es hier hauptsächlich um die Abschätzung der Größenordnung von τ_{11} geht, sei hier nur mitgeteilt, daß die anderen, komplizierteren Wellenfunktionen für ${}^7\text{Li}$ (WF 2 bis WF 4) alle etwa die gleichen Ergebnisse für

$\tau_{11}(S(E_1))$ und $\tau_{11}(\alpha)$ ergeben (innerhalb von ca. 25 % bei $\tau_{11}(S(E_1))$ und 5 % bei $\tau_{11}(\alpha)$), was aufgrund der Ergebnisse von Abschnitt 7.1 nicht überraschend ist.

Die Resultate (7.4) und (7.5) besitzen noch die Unsicherheit, die in der Abschätzung der Energie der sog. Dipolriesenresonanz verborgen ist. Neuere RGM-Rechnungen (He 85) zeigen nämlich Resonanzen positiver Parität zwischen etwa 17 und 23 MeV (allerdings in Kanälen mit höherliegenden Schwellen als $\alpha + {}^3\text{He}$ und ${}^6\text{Li} + p$ oder in Kanälen mit angeregten Fragmenten). Dies würde bedeuten, daß E_D mit 28.4 MeV etwas zu groß gewählt wurde. Die Resultate für τ_{11} würden sich dadurch höchstens um den Faktor 1.7 vergrößern.

Die berechneten Werte von τ_{11} sind mit dem aus einer experimentellen Analyse der Subcoulombstreuung von ${}^7\text{Li}$ stammenden Wert $|\tau_{11}| = |\tau_{12}| = 0.23 \pm 0.06 \text{ fm}^3$ (We 84a und We 85) zu vergleichen. Während das berechnete $\tau_{11}(\alpha)$ (Gl. (7.5)) wegen der schon erwähnten Unsicherheiten damit verträglich ist, weicht das berechnete $\tau_{11}(S(E_1))$ um etwa eine Größenordnung vom experimentellen Wert ab.

Voraussetzung für die Rechnung war aber die Anwendbarkeit der Closure-Approximation. Während bei der Polarisierbarkeit (Gl. (4.31))

$$\alpha = \frac{8\pi}{9} \sum_u \frac{B(E1, i \rightarrow u)}{E_u - E_i}$$

nur positive Terme aufsummiert werden, kann man $S_{3/2 \rightarrow 3/2}(E_1)$ umformen unter der Benutzung des Verhaltens des reduzierten Matrixelements bei Vertauschung der Zustände links und rechts und erhält:

$$S_{3/2 \rightarrow 3/2}(E_1) = \sum_u (-1)^{-3/2 - 3/2} \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 3/2 & 3/2 & J_u \end{matrix} \right\} (-1)^{\frac{3}{2} - J_u} |\langle J_u || \mathcal{O}_{ST}(E_1) || 3/2 \rangle|^2$$

Während das 6-j-Symbol für alle $J_u \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right\}$ negativ ist, liefert die auftretende Phase für $J_u = \frac{3}{2}$ ein anderes Vorzeichen als $J_u = \frac{1}{2}$ und $\frac{5}{2}$. Folglich ist der bei der Anwendung der Closure-Näherung entstehende Fehler, vor allem durch Kancellierungseffekte, bei $S_{3/2 \rightarrow 3/2}(E_1)$ größer als bei α . Aus dieser Sicht muß bei Verwendung der Closure-Approximation, die Tensorstärke der Polarisierbarkeit, über die Größe α berechnet werden und in der Tat ist das berechnete $\tau_{11}(\alpha)$ in befriedigender Übereinstimmung mit den dem Experiment entnommenen Werten.

Eine weitere Unsicherheit bei der Verwendung der Closure-Näherung liegt auch in der Tatsache, daß die schon erwähnten neueren RGM-Rechnungen (He 85) die Resonanzen für verschiedene J^π -Werte bei unterschiedlichen Energien liefern.

- 2) Da es sich aber bei den virtuell angeregten hochliegenden Zuständen um Kontinuumszustände handelt, muß bei der Polarisierbarkeit auch das kontinuierliche Spektrum berücksichtigt werden. Deshalb sind die Größen $S_{i \rightarrow f}(E1)$ und α nach den Gleichungen (4.35a und b) zu berechnen. Aufgrund der Erfahrungen von Abschnitt 7.2 verwenden wir zur Beschreibung des gebundenen Zustandes von ${}^7\text{Li}$ die Funktion WF 4 (s. Anhang 8) und die Streufunktion bestehend aus der Zerlegung ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}$.

Mit den Gleichungen (4.34) und (4.35) läßt sich dann τ schreiben als:

$$\tau_{i \rightarrow f} = \tau_{i \rightarrow f}(S_{i \rightarrow f}(E1)) = : \int S_{\tau(S(E1))}(E) dE$$

bzw.

$$\tau_{i \rightarrow f} = \tau_{i \rightarrow f}(\alpha) = : \int S_{\tau(\alpha)}(E) dE.$$

Die berechneten Integranden sind in Fig. 7.16 dargestellt, jeweils nach Partialwellen getrennt. Die gestrichelte Linie ist $S_{\tau(\alpha)}$, die durchgezogene $S_{\tau(S(E1))}$. Man beachte die unterschiedlichen Maßstäbe für den $\frac{1}{2}^+$ -Integranden einerseits und die $\frac{3}{2}^+$ - und $\frac{5}{2}^+$ -Integranden andererseits.

Integration über die Energie und Summation über die Partialwellen ergibt:

$$\tau_{11}(S_{11}(E1)) = -0.084 \text{ fm}^3$$

$$\tau_{11}(\alpha) = -0.066 \text{ fm}^3$$

Obwohl die Beiträge zu $\tau(S(E1))$ und $\tau(\alpha)$ bei den einzelnen Partialwellen unterschiedlich sind, stimmt der mehr quantenmechanische - Phasen und 6-j-Symbol enthaltende - Ausdruck $\tau(S(E1))$ nach Summation über die Partialwellen mit dem semiklassischen $\tau(\alpha)$ größenordnungsmäßig überein.

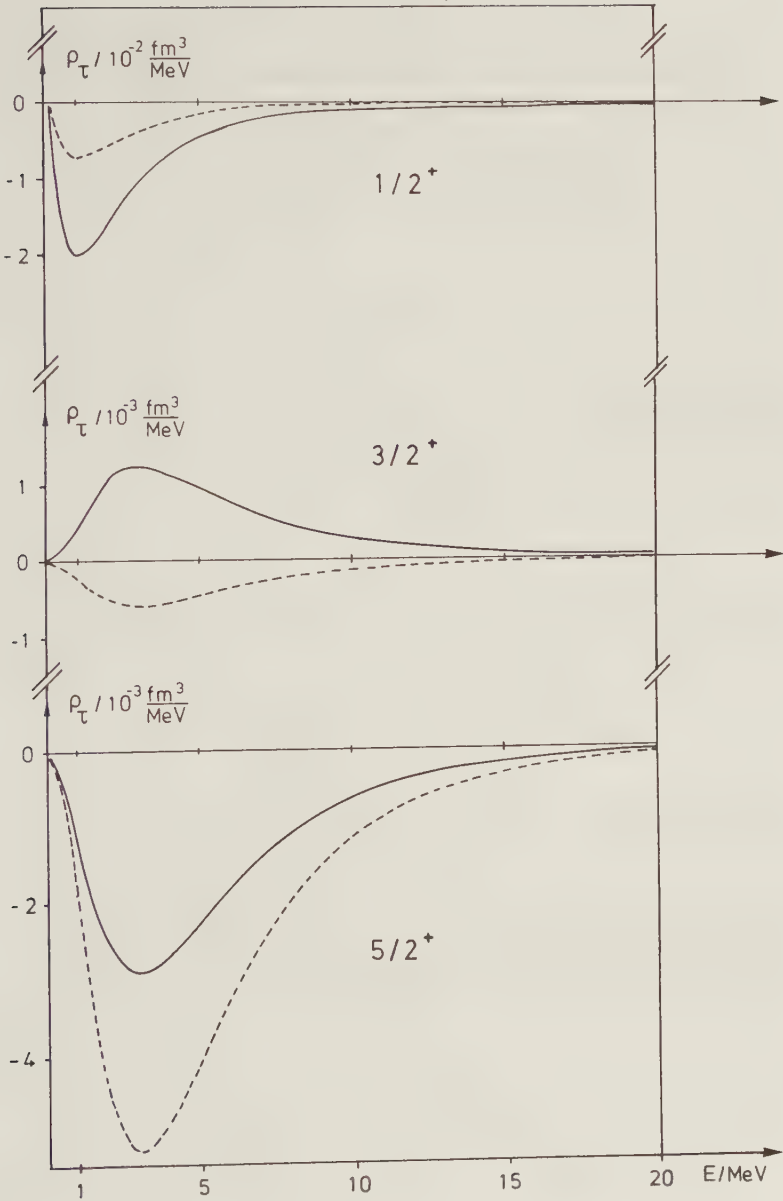


Fig. 7.16: Beiträge der einzelnen Partialwellen zu $\tau_{11}(S_{11}(E1))$ (—) und $\tau_{11}(\alpha)$ (----).

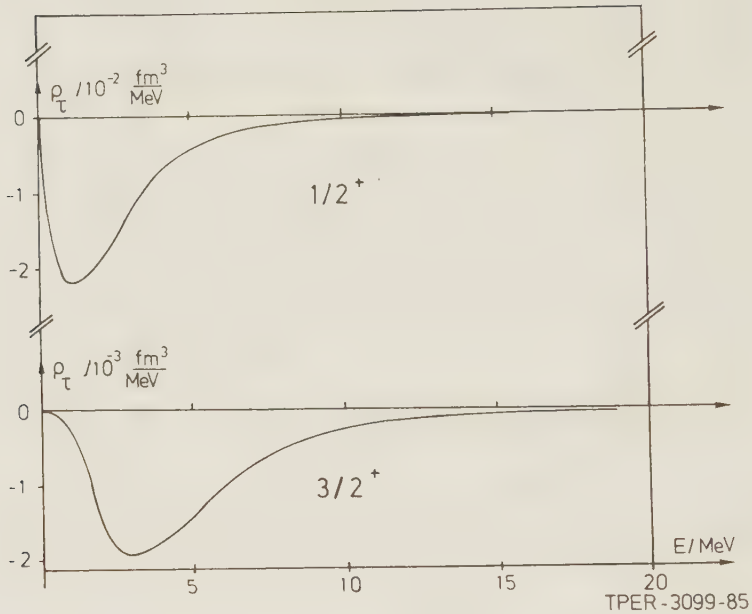


Fig. 7.17: Wie Fig. 7.16, nur für die inelastische Größe τ_{12} .

Die Integranden für den inelastischen Beitrag τ_{12} (d. h. $J_i = \frac{3}{2}^-$, $J_f = \frac{1}{2}^-$) sind in Fig. 7.17 dargestellt.

Da $\langle \frac{3}{2} \parallel \sigma_{ST}(E_2) \parallel \frac{3}{2} \rangle$ und $\langle \frac{3}{2} \parallel \sigma_{ST}(E_2) \parallel \frac{1}{2} \rangle$ nahezu gleich sind, sind die Integranden für $\tau_{12}(\alpha)$ gleich den beiden Integranden für $\tau_{11}(\alpha)$ der Partialbeiträge $\frac{1}{2}^+$ und $\frac{3}{2}^+$ (Fig. 7.16). Integrieren und Aufsummieren liefert:

$$\tau_{12}(S(E_1)) = -0.092 \text{ fm}^3 \quad \text{und}$$

$$\tau_{12}(\alpha) = -0.031 \text{ fm}^3.$$

Hier zeigt sich, daß der klassische Ausdruck $\tau_{12}(\alpha)$ die Phasen und Umkoppelungskoeffizienten nicht berücksichtigt und deshalb deutlich von $\tau_{12}(S_{12}(E))$ abweicht.

Folgende Bemerkungen sind angebracht:

- (i) $\tau_{11}(S_{11}(E))$ und $\tau_{12}(S_{12}(E))$ sind nahezu gleich, im Einklang mit dem Experiment (We 84a, We 85).
- (ii) Beide sind etwa um den Faktor 2,5 bis 3 kleiner als die aus der experimentellen Analyse gewonnenen Werte.
- (iii) Der Hauptbeitrag kommt bei der Partialwelle $\frac{1}{2}^{+}$ vom Energiebereich 1 bis 3 MeV über der Schwelle; bei den anderen beiden Partialwellen liegt das Maximum der Integranden bei etwa 3 MeV. Nicht überraschend ist deshalb, daß die $\frac{1}{2}^{+}$ -Partialwelle am meisten zur Polarisierbarkeit beiträgt, wie ja schon vom Strahlungseinfang bekannt ist (wo die gleichen Matrixelemente auftauchen).
- (iv) Das Experiment (We 84a) wurde unter der Voraussetzung der adiabatischen Näherung analysiert (Nö 76), d. h. unter der Voraussetzung, daß die Energie der virtuell angeregten Zwischenzustände viel größer ist als die typische Frequenz des beim Streuvorgang entstehenden Feldes:

$$E_u - E_i \gg \hbar \frac{v \cdot 2E}{z_1 z_2 e^2} = \frac{2E}{\eta} ,$$

wobei v die Relativgeschwindigkeit und E die Relativenergie der beiden Streupartner ist. Der Sommerfeldparameter η ist in der Größenordnung von 10 bis 20 bei den hier betrachteten Fällen.

Wenn also der Hauptbeitrag zu τ nicht von einer Riesenresonanz bei 28 MeV kommt, sondern vom virtuellen Aufbruch bei einigen MeV über der Schwelle, so stellt sich die Frage nach der Gültigkeit der Adiabasie, welche Voraussetzung für die Analyse des Experiments war.

- (v) Die Überlegungen in (iv) werden hinfällig, wenn sich erweisen sollte, daß der virtuelle Aufbruch in andere Kanäle bei höheren Energien erheblich zur Polarisierbarkeit beiträgt. Da andere Clusterzerlegungen (${}^6\text{Li}+n$), wie in Abschnitt 7.1 beschrieben, die elektromagnetischen Eigenschaften sehr wohl verändern, ist zu vermuten, daß auch die

Polarisierbarkeit durch weitere Kanäle, insbesondere bei höheren Energien, beeinflußt wird. Dazu muß jedoch eine Streurechnung gemacht werden, bei der die Streufunktion durch Satz 2 von Entwicklungsfunktionen (s. Abschnitt 7.2) approximiert wird und zusätzlich zur Struktur ${}^6\text{Li} + n$ viele weitere Kanäle (He 85) berücksichtigt werden. Wegen des großen technischen Aufwandes ist dies Gegenstand einer eigenständigen Untersuchung.

8. SCHLUBBEMERKUNG UND AUSBLICK

In dieser Arbeit wurde die Refined-Resonating-Group-Methode erfolgreich erweitert, so daß Matrixelemente der elektromagnetischen Multipoloperatoren berechnet werden können. Es wurde dadurch ein neues Feld eröffnet, nämlich das Studium der elektromagnetischen Eigenschaften leichter Atomkerne.

Sowohl die statischen Momente von ${}^6\text{Li}$ und ${}^7\text{Li}$ als auch die berechneten reduzierten Übergangsstärken stimmen sehr gut mit den experimentellen Daten überein. Darüberhinaus werden elektromagnetische Eigenschaften des Korns ${}^7\text{Be}$ vorhergesagt. Weiterhin gelingt es, den niederenergetischen Einfangquerschnitt für die Reaktion ${}^3\text{He}(p, \gamma){}^7\text{Be}$ zu reproduzieren. Die Untersuchung der elektrischen Polarisierbarkeit von ${}^7\text{Li}$ zeigt, daß die sog. Closure-Approximation nicht angewendet werden sollte, sondern eine Kontinuumsrechnung gemacht werden muß. Einkanalrechnungen ergeben, daß der virtuelle Aufbruch in α -Teilchen und Triton etwa ein Drittel zur experimentell unter der Voraussetzung der Adiabasie gefundenen Polarisierbarkeit beiträgt.

hervorzuheben ist, daß das für alle Untersuchungen verwendete Potential keine freien Parameter hat und keine effektiven Ladungen, sondern die g-Faktoren der freien Nukleonen verwendet werden. Durch Hinzunahme von weiteren Funktionen zu den einfachen Clusterzerlegungen lassen sich alle Größen konsistent beschreiben (eventuell außer der Polarisierbarkeit).

Die erzielten Ergebnisse sind erfolgsversprechend im Hinblick auf die Erweiterung der Fragestellungen und zukünftigen Untersuchungen. Mit verfeinerten Methoden - wie in 7.2 angedeutet - könnte eine genaue Berechnung des astrophysikalischen S-Faktors bei der Energie Null erfolgen. Für weitere Untersuchungen bieten sich die Winkelverteilung von Strahlungseinfangreaktionen und protonukleare Reaktionen mit polarisierten Teilchen an. Mit den bisher entwickelten Methoden könnten die astrophysikalisch interessanten Reaktionen $\alpha, \gamma, {}^6\text{Li}$ (Ba 81) und ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$ (Ba 82) studiert werden. Die Reaktionen ${}^3\text{He}(p, \gamma){}^4\text{He}$ und ${}^3\text{He}(n, \gamma){}^4\text{He}$ sind hinsichtlich des Tests der Ladungssymmetrie und - wie auch der Deuteron-Deuteron-Einfang - im Hinblick auf die D-Zustandsbeimischung in ${}^4\text{He}$ interessant.

Da die bisherigen Methoden auf niedrige Kanalenergien ($\lesssim 25$ MeV) beschränkt sind, ist eine Erweiterung auf höhere bis mittlere Energiebereiche erstrebenswert. Dazu wird es erforderlich sein, die Wellenfunktionen durch die Verwendung von Polynomen auf der Relativbewegung zu verbessern und ein neues, für höhere Energien geeigneteres Potential zu verwenden. Weiterhin wird man als Test für die Wellenfunktionen Formfaktoren berechnen müssen und versuchen, ohne Langwellennäherung auszukommen.

Diese Untersuchungen werden teilweise bereits begonnen.

ANHANG 1: MULTIPOLENTWICKLUNG DES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDDES

In diesem Anhang wird die Multipolentwicklung des Vektorpotentials und des Magnetfeldes, d. h. der Ausdrücke $\underline{e}_\mu e^{ikz}$ und $\nabla \times \underline{e}_\mu e^{ikz}$, durchgeführt. Dies sind die Terme, die aufgrund der Bahnbewegung und des magnetischen Moments der Nukleonen in den Wechselwirkungsoperator eingehen.

Wir beginnen mit der Multipolentwicklung der sich in z-Richtung ausbreitenden ebenen Welle (Ed 60):

$$\underline{e}_\mu e^{ikz} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)} j_\ell(kr) Y_{\ell 0}(\vartheta, \varphi) \underline{e}_\mu$$

Definiert man die Vektorkugelfunktionen (Ed 60)

$$Y_{L\ell M}(\vartheta, \varphi) := \sum_{m, q} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \underline{e}_q (L, m, 1, q | L, M) \quad , \quad (A.1)$$

so folgt aus der Orthogonalitätsrelation der Clebsch-Gordan-Koeffizienten:

$$\underline{e}_\mu e^{ikz} = \sum_{L, \ell} i^\ell \sqrt{4\pi(2\ell+1)} j_\ell(kr) (\ell 0 1 \mu | L, \mu) Y_{L\ell\mu}(\vartheta, \varphi)$$

Weil für die Helizität des Photons $\mu \neq 0$ gilt und $|L - 1| \leq 1 \leq L + 1$ erhält man mit der Auswertung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \underline{e}_\mu e^{ikz} &= \\ &= \sum_{L=1}^{\infty} \left\{ -i^L \sqrt{2\pi(2L+1)} \mu j_L(kr) Y_{L, L\mu}(\vartheta) \right. \\ &\quad + i^{L+1} \sqrt{2\pi(L+1)} j_{L-1}(kr) Y_{L, L-1\mu}(\vartheta) \\ &\quad \left. + i^{L+1} \sqrt{2\pi L} j_{L+1}(kr) Y_{L, L+1\mu}(\vartheta) \right\} \end{aligned} \quad (A.2)$$

Um die Vektorkugelfunktionen durch Differentialoperatoren und Kugelflächenfunktionen zu ersetzen, was für die konkrete Berechnung der Matricelemente zweckmäßiger ist, verwenden wir mit dem Drehimpulsoperator $\underline{L} = -i \underline{r} \times \nabla$ die beiden Beziehungen (Ed 60, Ro 67, Br 62)

$$\underline{L} (j_L(kr) Y_{L\mu}(\hat{r})) = \sqrt{L(L+1)} j_L(kr) Y_{LL\mu}(\hat{r}) \quad (\text{A.3})$$

und

$$\begin{aligned} (\nabla \times \underline{L}) (j_L(kr) Y_{L\mu}(\hat{r})) &= \\ &= -ik \sqrt{\frac{L(L+1)}{2L+1}} \left(\sqrt{L} j_{L+1}(kr) Y_{LL+1\mu}(\hat{r}) + \sqrt{L+1} j_{L-1}(kr) Y_{LL-1\mu}(\hat{r}) \right), \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \underline{e}_\mu e^{ikz} &= \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{L=1}^{\infty} \left\{ \mu i^L \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)}{L(L+1)}} \underline{L} (j_L(kr) Y_{L\mu}(\hat{r})) \right. \\ &\quad \left. + i^L \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)}{L(L+1)}} \frac{1}{k} \nabla \times \underline{L} (j_L(kr) Y_{L\mu}(\hat{r})) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Den Übergang auf den Fall einer willkürlichen Ausbreitungsrichtung erhält man durch Drehung des Koordinatensystems, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben ist. Das Resultat ist (vgl. 2.22)

$$\underline{e}'_\mu e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{LM} \left(\mu \underline{A}_{LM}^u + \underline{A}_{LM}^e \right) \mathcal{D}_{M\mu}^L. \quad (\text{A.5})$$

Dies ist eine in $\mathbf{k}$ -Richtung sich ausbreitende ebene Welle mit Polarisations-einheitsvektor $\underline{e}'_\mu$ senkrecht zu $\mathbf{k}$. Der magnetische und elektrische Anteil ist gegeben durch

$$\underline{A}_{LM}^u = i^L \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)}{L(L+1)}} \underline{L} (j_L(kr) Y_{LM}(\hat{r}))$$

und

$$A_{LM}^e = i^L \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)}{L(L+1)}} \frac{1}{k} \nabla \times \underline{L} (j_L(kr) Y_{LM}(\hat{r})) .$$

In der Näherung langer Wellenlängen verhalten sich die sphärischen Besselfunktionen wie (Ab 65)

$$j_L(kr) \underset{kr \rightarrow 0}{\approx} \frac{(kr)^L}{(2L+1)!!} ,$$

so daß man weiter erhält:

$$A_{LM}^u = \frac{(ik)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)}{L(L+1)}} \underline{L} (r^L Y_{LM}) . \quad (A.6)$$

Mit $\underline{L} = -i \underline{r} \times \nabla$ ergibt sich:

$$\underline{A}_{LM}^u = i \frac{(ik)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)}{L(L+1)}} \nabla (r^L Y_{LM}) \times \underline{r} . \quad (A.7)$$

Für A_{LM}^e (Gl. 2.23b) erhält man

$$\underline{A}_{LM}^e = \frac{(ik)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)}{L(L+1)}} \frac{1}{k} \nabla \times \underline{L} (r^L Y_{LM}) .$$

Mit $\nabla \times \underline{L} (r^L Y_{LM}) = i(L+1) \nabla (r^L Y_{LM})$ (Ro 67)

ergibt sich:

$$\underline{A}_{LM}^e = \frac{i}{k} \frac{(ik)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)(L+1)}{L}} \nabla (r^L Y_{LM}) . \quad (A.8)$$

Setzt man (A.7) und (A.8) in (A.5) ein, so erhält man die Langwellennäherung der Multipolentwicklung:

$$\underline{e}'_{\mu} e^{ikr} = \quad (A.9)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{LM} \left\{ \mu \frac{i(ik)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)}{L(L+1)}} \nabla(r^L Y_{LM}) \times \underline{r} \right. \\ \left. + \frac{i}{k} \frac{(ik)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{\frac{4\pi(2L+1)(L+1)}{L}} \nabla(r^L Y_{LM}) \right\} \mathcal{D}_{M\mu}^L.$$

Für den Wechselwirkungsoperator (Gl. 3.15) benötigt man aber auch die Multipolentwicklung von $\nabla \times \underline{e}'_{\mu} e^{ikr}$. Dazu gehen wir von Gl. (A.5) für $\underline{e}'_{\mu} e^{ikr}$ aus und erhalten:

$$\nabla \times \underline{e}'_{\mu} e^{ikr} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{LM} (\mu \nabla \times \underline{A}_{LM}^m + \nabla \times \underline{A}_{LM}^e) \mathcal{D}_{M\mu}^L.$$

Für den magnetischen und elektrischen Anteil gelten nun aber die Beziehungen (Ro 67)

$$\nabla \times \underline{A}_{LM}^m = k \underline{A}_{LM}^e$$

und

$$\nabla \times \underline{A}_{LM}^e = k \underline{A}_{LM}^m.$$

Hiermit und mit den Beziehungen (A.6) bzw. (A.8) für $\underline{A}_{LM}^m$ und $\underline{A}_{LM}^e$ in Langwellennäherung erhalten wir schließlich

$$\underline{\nabla} \times \underline{e}'_{\mu} e^{ikr} = \quad (A.10) \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{LM} \frac{(ik)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{4\pi(2L+1)} \\ \left\{ i\mu \frac{L+1}{L} \nabla(r^L Y_{LM}(\hat{r})) + k \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}} L(r^L Y_{LM}(\hat{r})) \right\} \mathcal{D}_{M\mu}^L,$$

die Multipolentwicklung des magnetischen Feldes in der Langwellennäherung.

ANHANG 2: WINKELVERTEILUNG

Hier wird die Winkelverteilung für die Emission eines Photons mit Impuls $\underline{k}$ und Polarisation $\underline{e}_\mu$ zwischen unpolarisierten Kernzuständen $|\alpha J\rangle$ und $|\alpha' J'\rangle$ berechnet:

Ausgehend von Gl. (4.6) für die Übergangswahrscheinlichkeit erhält man mit dem Wechselwirkungsoperator (Gl. 3.17):

$$\begin{aligned}
 W_{\text{unpol}}(\underline{k}, \mu, \alpha J \rightarrow \alpha' J') &= \\
 &= \frac{k}{2\pi\hbar} \sum_{j' j} \frac{1}{2J+1} \\
 &\cdot \left| \langle \alpha J J | - \sum_{LM} \frac{(ik)^L}{(2L+1)!!} \sqrt{\frac{2\pi(2L+1)(L+1)}{L}} (\sigma_{LM}(\underline{e}) - i\mu \sigma_{LM}(\underline{u})) \mathcal{D}_{M\mu}^L | \alpha' J' J' \rangle \right|^2,
 \end{aligned}$$

wobei Bahn- und Spinoperator bereits zusammengefaßt wurden:

$$\sigma_{LM}(\underline{e}) := \sigma_{(ST)}(\underline{e}, LM) + \sigma'(\underline{e}, LM)$$

Der Übergang auf reduzierte Matrixelemente (Ed 60)

$$\langle \alpha J J | \sigma_{LM} | \alpha' J' J' \rangle = \frac{(J' J' LM | J J)}{\sqrt{2J+1}} \langle \alpha J || \sigma_L || \alpha' J' \rangle \quad (\text{A.11})$$

und Verwendung der Eigenschaften der Drehmatrizen (Ed 60) liefert

$$\begin{aligned}
 W_{\text{unpol}}(\underline{k}, \mu, \alpha J \rightarrow \alpha' J') &= \\
 &= \frac{k}{2\pi\hbar} \sum_{j' j' L' M' \mu} \frac{1}{(2J+1)^2} (J' J' LM | J J) (J' J' L' M' | J J) (-1)^{M'-\mu} \\
 &\cdot \frac{(i)^L (-i)^{L'} k^{L+L'}}{(2L+1)!! (2L'+1)!!} 2\pi \sqrt{\frac{(2L+1)(2L'+1)(L+1)(L'+1)}{L L'}} \mathcal{D}_{M\mu}^L \mathcal{D}_{-M'-\mu}^{L'} \\
 &\cdot \langle \alpha J || \sigma_L(\underline{e}) - i\mu \sigma_L(\underline{u}) || \alpha' J' \rangle \langle \alpha J || \sigma_{L'}(\underline{e}) - i\mu \sigma_{L'}(\underline{u}) || \alpha' J' \rangle^*
 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch (Ed 60)

$$\mathcal{D}_{M\mu}^L \mathcal{D}_{-M'-\mu}^L = \sum_N (LM L'-M' | NM -M') (L\mu L'-\mu | N0) \mathcal{D}_{M-M',0}^N$$

und

$$\mathcal{D}_{00}^N = P_N(\cos \theta_k)$$

(P_N ist das N-te Legendre-Polynom), so erhält man

$$\begin{aligned} W_{\text{impol}}(\underline{k}, \mu, \alpha J \rightarrow \alpha' J') &= \\ &= \frac{1}{k} \frac{1}{(2J+1)^2} \sum_{N j j' L L' M} (-1)^{M-\mu} \frac{i^L (-i)^{L'} k^{L+L'+1}}{(2L+1)!! (2L'+1)!!} \sqrt{\frac{(2L+1)(2L'+1)(L+1)(L'+1)}{L L'}} \\ &\cdot (LM L'-M | N0) (L\mu L'-\mu | N0) (J' j' LM | J j) (J' j' L' M | J j) \quad (\text{A.13}) \\ &\cdot \langle \alpha J || \mathcal{O}_L(\epsilon) - i\mu \mathcal{O}_L(\mathcal{M}) || \alpha' J' \rangle \langle \alpha J || \mathcal{O}_{L'}(\epsilon) - i\mu \mathcal{O}_{L'}(\mathcal{M}) || \alpha' J' \rangle^* \\ &\cdot P_N(\cos \theta_k) . \end{aligned}$$

Dies ist die Winkelverteilung des emittierten Photons $(\underline{k}, \underline{e}'_{\mu})$.

ANHANG 3: DIE FLUßNORMIERUNG DER STREUFUNKTION

Hier soll gezeigt werden, daß die Streufunktion (5.12) eine in z-Richtung einlaufende Coulombwelle mit Fluß $\underline{j} = \frac{\hbar K}{m}$ enthält:

Ausgehend vom asymptotischen Anteil von (5.12)

$$\begin{aligned}
 & | \propto S_{c\lambda} M_{c\lambda} \lambda > \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sum_{L\lambda} \sqrt{4\pi(2L\lambda+1)} i^{L\lambda} e^{i\sigma_{L\lambda}} \\
 & \cdot \sum_{Jj} (L\lambda 0 S_{c\lambda} M_{c\lambda} | Jj) \sum_{\tau} ((1-i a)^{-1})_{\lambda\tau} \sum_{\kappa} (\delta_{\tau\kappa} F_{L\kappa} + a_{\tau\kappa} G_{L\kappa}) \\
 & \cdot \left[\frac{Y_{L\kappa}}{K_{\kappa} R_{\kappa}} \otimes \left[\bar{\Psi}_{\kappa}^{J_1^{\pi_1}} \otimes \bar{\Psi}_{\kappa}^{J_2^{\pi_2}} \right] S_{c\kappa} \right]^{Jj} \quad (A.14)
 \end{aligned}$$

erhält man mit den asymptotisch auslaufenden Kugelwellen entsprechenden Funktionen (Me 61)

$$u_L^+(R) = e^{-i\sigma_L} (G_L(R) + i F_L(R))$$

die Form

$$\begin{aligned}
 & | \propto S_{c\lambda} M_{c\lambda} \lambda > \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sum_{L\lambda} \sqrt{4\pi(2L\lambda+1)} i^{L\lambda} e^{i\sigma_{L\lambda}} \\
 & \cdot \sum_{Jj} (L\lambda 0 S_{c\lambda} M_{c\lambda} | Jj) \sum_{\kappa} \left\{ \delta_{\lambda\kappa} F_{L\kappa} + e^{i\sigma_{L\kappa}} ((1-i a)^{-1} \circ a)_{\lambda\kappa} u_{L\kappa}^+ \right\} \\
 & \cdot \left[\frac{Y_{L\kappa}}{K_{\kappa} R_{\kappa}} \otimes \left[\bar{\Psi}_{\kappa}^{J_1^{\pi_1}} \otimes \bar{\Psi}_{\kappa}^{J_2^{\pi_2}} \right] S_{c\kappa} \right]^{Jj} \quad (A.15)
 \end{aligned}$$

Der Term $\delta_{\lambda\kappa} F_{L\kappa}$ liefert die im Kanal λ einlaufende Coulombwelle ψ_{in} (Me 61):

$$\psi_{in} \rightarrow \sum_{L\lambda} \sqrt{4\pi(2L_\lambda+1)} i^{L_\lambda} e^{i\sigma_{L\lambda}} \sum_{Jj} (L_\lambda 0 S_{c\lambda} M_{S_{c\lambda}} | Jj) \cdot \frac{F_{L_\lambda}}{K_\lambda R_\lambda} \left[Y_{L_\lambda} \otimes \left[\bar{\Psi}_\lambda^{J_1 \pi_1} \otimes \bar{\Psi}_\lambda^{J_2 \pi_2} \right]^{S_{c\lambda}} \right]^{Jj}$$

d. h.

$$\psi_{in} \rightarrow \sum_{L\lambda} \sqrt{4\pi(2L_\lambda+1)} i^{L_\lambda} e^{i\sigma_{L\lambda}} \frac{F_{L_\lambda}(R_\lambda)}{K_\lambda R_\lambda} Y_{L_\lambda 0}(\hat{R}_\lambda) \left[\bar{\Psi}_\lambda^{J_1 \pi_1} \otimes \bar{\Psi}_\lambda^{J_2 \pi_2} \right]^{S_{c\lambda} M_{S_{c\lambda}}} \quad (A.16)$$

mit dem zugehörigen einlaufenden Fluß

$$j_{in} = \frac{ik_\lambda}{m_\lambda}$$

Im Falle der Potentialstreuung entspricht (A.16) der Partialwellenentwicklung der in z-Richtung laufenden ebenen Welle und (A.15) der asymptotischen Form der Streufunktion

$$\psi \rightarrow e^{iKz} + f(\vartheta) \frac{e^{iKR}}{R}$$

nämlich eine ebene Welle plus auslaufende Kugelwelle.

Im Falle eines einzigen Kanals gilt für die Reaktanz"matrix" a und die Streuphase δ der Zusammenhang: $a = \tan \delta$. (A.14) geht damit über in:

$$\begin{aligned} | \alpha S_c M_{S_c} \rangle &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sum_{L_{rel}} \sqrt{4\pi(2L_{rel}+1)} i^{L_{rel}} e^{i(\sigma_{L_{rel}} + \delta)} \\ &\cdot \sum_{Jj} (L_{rel} 0 S_c M_{S_c} | Jj) (\cos \delta F_{L_{rel}} + \sin \delta G_{L_{rel}}) \\ &\cdot \left[\frac{Y_{L_{rel}}}{K R} \otimes \left[\bar{\Psi}^{J_1 \pi_1} \otimes \bar{\Psi}^{J_2 \pi_2} \right]^{S_c} \right]^{Jj} \end{aligned}$$

ANHANG 4: DIE MULTIPOLOPERATOREN ALS SPHÄRISCHE TENSOROPERATOREN

Hier werden die Operatoren (3.18) und (3.23) auf die Form sphärischer Tensoroperatoren im Orts- und Spinraum gebracht.

a) Man verwendet (Ed 60):

$$\nabla(r^L Y_{LM}) = \sqrt{L(2L+1)} r^{L-1} Y_{L-1M} \quad (A.17)$$

Mit (A.1) und $\tilde{p}_i = \frac{\hbar}{i} \nabla_i$ erhält man dann aus (3.18a) für den elektrischen Bahnoperator

$$O(E, LM) = -\frac{2}{k} \sqrt{L(2L+1)} \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{i=1}^A g_{Li} \sum_{qq'} (L-1 q' 1 q' | LM) \tilde{r}_i^{L-1} Y_{L-1q}(\hat{r}_i) \cdot \nabla_i(q') \quad (A.18)$$

b) Mit (A.1) und (A.3) ergibt sich für den elektrischen Spinoperator aus (3.18b):

$$O'(E, LM) = -k \sqrt{\frac{L}{L+1}} \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{i=1}^A g_{Si} \sum_{qq'} (L q' 1 q' | LM) \tilde{r}_i^L Y_{Lq}(\hat{r}_i) \cdot S_i(q') \quad (A.19)$$

c) Mit

$$\nabla(r^L Y_{LM}) \cdot (\underline{r} \times \underline{p}) = (\nabla(r^L Y_{LM}) \times \underline{r}) \cdot \underline{p}$$

und

$$\nabla(r^L Y_{LM}) \times \underline{r} = -i \sqrt{L(L+1)} \sum_{qq'} (L q' 1 q' | LM) r^L Y_{Lq} \underline{e}_{q'}$$

ergibt (3.18c) den magnetischen Bahnoperator

$$O(M, LM) = -2 \sqrt{\frac{L}{L+1}} \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{i=1}^A g_{Li} \sum_{qq'} (L q' 1 q' | LM) \tilde{r}_i^L Y_{Lq}(\hat{r}_i) \cdot \nabla_i(q') \quad (A.20)$$

- d) Mit (A.17) und (A.1) erhält man aus (3.18d) den magnetischen Spinoperator

$$O'(\mathcal{M}, LM) = \sqrt{L(2L+1)} \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{i=1}^A g_{si} \sum_{qq'} (L-1q \ 1q' / LM) \tilde{r}_i^{L-1} Y_{L-1q}(\hat{r}_i) S_i(q'). \quad (A.21)$$

- e) Der Siegert-Theorem-Operator (2.23) hat bereits die gewünschte Form

$$O_{ST}(\epsilon, LM) = e \sum_{i=1}^A g_{si} \tilde{r}_i^L Y_{LM}(\hat{r}_i). \quad (A.22)$$

Hiermit sind die Multipoloperatoren als Tensoroperatoren im Orts- und Spinraum dargestellt und damit zur Berechnung der Matrixelemente (Kap. 6) geeignet.

ANHANG 5: AUFSPALTUNG DER MATRIXELEMENTE IN REDUZIERTES SPIN- UND REDUZIERTES ORTSMATRIXELEMENT FÜR DIE EINZELNEN OPERATOREN

Hier wird die Ausreduktion der Multipolmatrixelemente in reduziertes Ortsmatrixelement und reduziertes Spinmatrixelement durchgeführt. Dazu verwenden wir die Umkopplungsformel (Br 62)

$$\begin{aligned}
 & (l'm' s' \sigma' | J' j') (l m s \sigma | J j) = \\
 & = \sum_{d e f \varphi} (-1)^{l-m+s-\sigma'+J-j} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)(2e+1)(2f+1)} \begin{Bmatrix} l' & s' & J' \\ l & s & J \\ e & f & d \end{Bmatrix} \\
 & \cdot (l'm' l-m | e e) (s \sigma' s - \sigma' | f \varphi) (e e f \varphi | d \delta) (J' j' J - j | d \delta) \quad (A.23)
 \end{aligned}$$

Mit der Wellenfunktion (5.14) und den Operatoren (6.1) erhält man

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi^{J' j'} | \mathcal{A} O(\epsilon, L M) | \psi^{J j} \rangle = \\
 & = -\frac{2}{k} \sqrt{L(2L+1)} \frac{e \hbar}{2 m c} \sum_{\alpha \alpha' P} \text{sgn} P C_{\alpha'}^{l' s' J' *} C_{\alpha}^{l s J} \sum_{\substack{l m' \\ s \sigma'}} (l'm' s' \sigma' | J' j') (l m s \sigma | J j) \\
 & \cdot \sum_{i=1}^A g_{\epsilon i} \langle \alpha' l' m' | P \tilde{W}_i(L-1, 1; L) | \alpha l m \rangle \langle \alpha' s' \sigma' | P | \alpha s \sigma \rangle. \quad (A.24)
 \end{aligned}$$

Der Übergang auf reduzierte Orts- und Spinmatrixelemente, die Verwendung von (A.23), die Symmetrieeigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten und die aus deren Orthogonalität folgende Beziehung

$$\sum_{\sigma} (-1)^{s-\sigma} (s \sigma s - \sigma | f \varphi) = \sqrt{2s+1} \delta_{f0} \delta_{\varphi 0} \quad (A.25)$$

liefert

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi^{J'j'} | A O(E, LM) | \psi^{Jj} \rangle = \\
 & = -\frac{2}{k} \sqrt{L(2L+1)} \frac{et}{2mc} \sum_{\alpha \alpha' P} \text{sgn} P c_{\alpha'}^{l's'j'*} c_{\alpha}^{l s j} \sum_{m m' d \delta} (-1)^{J-j} \delta_{ss'} \\
 & \cdot \sqrt{(2j+1)(2j'+1)(2d+1)} \left\{ \begin{matrix} l's'j' \\ l s j \\ d 0 d \end{matrix} \right\} (l'm' l-m | d \delta) (J'j' J-j | d \delta) \\
 & \cdot \frac{(l'm' l-m | LM)}{\sqrt{2L+1}} \sum_i g_{\lambda i} \langle \alpha' l' || P \tilde{w}_i(L-1, 1; L) || \alpha l \rangle \langle \alpha' s' || P || \alpha s \rangle .
 \end{aligned}$$

Durch Ausführen der Summation über m, m', d und δ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi^{J'j'} | A O(E, LM) | \psi^{Jj} \rangle = \\
 & = -\frac{2}{k} \sqrt{L} \frac{et}{2mc} \delta_{ss'} \sum_{\alpha \alpha' P} c_{\alpha'}^{l's'j'*} c_{\alpha}^{l s j} \text{sgn} P (-1)^{L+l'+s+j} \\
 & \cdot \frac{\sqrt{(2j+1)(2j'+1)}}{2S+1} \left\{ \begin{matrix} l' l L \\ j j' S \end{matrix} \right\} (J'j' J-j | LM) \quad (A.26) \\
 & \cdot \sum_{i=1}^A g_{\lambda i} \langle \alpha' l' || P \tilde{w}_i(L-1, 1; L) || \alpha l \rangle \langle \alpha' s' || P || \alpha s \rangle .
 \end{aligned}$$

Für den elektrischen Spinoperator ist das Matrixelement gegeben durch

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi^{J'j'} | A O'(E, LM) | \psi^{Jj} \rangle = \\
 & = k \sqrt{\frac{L}{L+1}} \frac{et}{2mc} \sum_{\alpha \alpha' P} c_{\alpha'}^{l's'j'*} c_{\alpha}^{l s j} \text{sgn} P \sum_{\substack{m m' \\ \delta \delta'}} (l'm' s' \delta' | J'j') (l m s \delta | Jj) \\
 & \cdot \sum_{i=1}^A g_{\lambda i} \sum_{q q'} (L q 1 q' | LM) \langle \alpha' l' m' | P w_i(L q) | \alpha l m \rangle \langle \alpha' s' \delta' | P S_i(q') | \alpha s \delta \rangle .
 \end{aligned}$$

Wiederum liefert der Übergang auf reduzierte Matrixelemente, die Gleichung (A.23) und die Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi^{J'j'} | \mathcal{A} \mathcal{O}'(\epsilon, LM) | \psi^{Jj} \rangle = \\
 & = -k \sqrt{\frac{L}{L+1}} \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{\alpha\alpha'P} c_{\alpha'}^{l's'j'} * c_{\alpha}^{lsj} \text{sgn} P \sum_{\substack{u_1 u_2 \\ \delta\delta' q q'}} \sum_{\substack{d\delta e\epsilon \\ f\varphi}} (-1)^{l-u+S-\delta+J-j} \\
 & \cdot \sqrt{(2J+1)(2J'+1)(2e+1)(2f+1)} \left\{ \begin{matrix} l' s' j' \\ l s j \\ e f d \end{matrix} \right\} (l' u' l - u | e\epsilon) (s' \delta' s - \delta | f\varphi) \\
 & \cdot (e\epsilon f\varphi | d\delta) (J' j' J - j | d\delta) (L q 1 q' | LM) \frac{(l u l q | l' u') (s \delta 1 q' | s \delta')}{\sqrt{2l'+1} \sqrt{2s'+1}} \\
 & \cdot \sum_i g_{Si} \langle \alpha' l' \| P w_i(L) \| \alpha l \rangle \langle \alpha' s' \| P S_i \| \alpha s \rangle
 \end{aligned}$$

Durch Ausführen der Summation und mit den Symmetrieeigenschaften des 9-j-Symbols (Ed 60) erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi^{J'j'} | \mathcal{A} \mathcal{O}'(\epsilon, LM) | \psi^{Jj} \rangle = \\
 & = k \sqrt{\frac{L}{L+1}} \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{\alpha\alpha'P} c_{\alpha'}^{l's'j'} * c_{\alpha}^{lsj} \text{sgn} P (-1)^{s'+s+l'+l+J+j} \\
 & \cdot \sqrt{(2J'+1)(2J+1)} \left\{ \begin{matrix} s' s 1 \\ l' l L \\ J' J L \end{matrix} \right\} (J' j' J - j | LM) \quad (A.27) \\
 & \cdot \sum_{i=1}^A g_{Si} \langle \alpha' l' \| P w_i(L) \| \alpha l \rangle \langle \alpha' s' \| P S_i \| \alpha s \rangle
 \end{aligned}$$

Da die restlichen Matrixelemente von analoger Struktur wie die beiden schon behandelten sind, erhält man sofort durch Vergleich die Matrixelemente der magnetischen Operatoren:

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi^{J'j'} | \mathcal{A} \mathcal{O}(\mathcal{M}, LM) | \psi^{Jj} \rangle = \\
 & = -2 \sqrt{\frac{L}{(L+1)(2L+1)}} \frac{e\hbar}{2mc} \delta_{SS'} \sum_{\alpha \alpha' P} c_{\alpha'}^{L'S'J'}^* c_{\alpha}^{LSJ} \operatorname{sgn} P (-1)^{L+L'+S+j} \\
 & \cdot \sqrt{\frac{(2J+1)(2J'+1)}{2S+1}} \left\{ \begin{matrix} L' & L & L \\ J & J' & S \end{matrix} \right\} (J'j' J-j | LM) \quad (A.28)
 \end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{i=1}^A g_{Li} \langle \alpha' l' \| P \tilde{w}_i(L_1; L) \| \alpha l \rangle \langle \alpha' s \| P \| \alpha S \rangle$$

und

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi^{J'j'} | \mathcal{A} \mathcal{O}'(\mathcal{M}, LM) | \psi^{Jj} \rangle = \\
 & = \sqrt{L(2L+1)} \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{\alpha \alpha' P} c_{\alpha'}^{L'S'J'}^* c_{\alpha}^{LSJ} \operatorname{sgn} P (-1)^{S'+S+L'+L+J'+j} \\
 & \cdot \sqrt{(2J+1)(2J'+1)} \left\{ \begin{matrix} S' & S & 1 \\ L' & L & L-1 \\ J' & J & L \end{matrix} \right\} (J'j' J-j | LM) \quad (A.29)
 \end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{i=1}^A g_{Si} \langle \alpha' l' \| P w_i(L-1) \| \alpha l \rangle \langle \alpha' s' \| P S_i \| \alpha S \rangle .$$

Es bleibt noch das Matrixelement des Siegert-Theorem-Operators $O_{ST}(E, LM)$ zu berechnen. Der Vergleich mit (A.24) und (A.26) gibt

$$\begin{aligned}
 & \langle \psi^{J'j'} | O_{ST}(E, LM) | \psi^{Jj} \rangle = \\
 & = e \delta_{SS'} \sum_{\alpha \alpha' P} c_{\alpha'}^{L'SJ'} * c_{\alpha}^{LSJ} \text{sgn } P (-1)^{L+L'+S+j} \\
 & \cdot \sqrt{\frac{(2J+1)(2J'+1)}{(2L+1)(2S+1)}} \left\{ \begin{matrix} L' & L & L \\ J & J' & S \end{matrix} \right\} (J' j' J - j / LM) \quad (A.30) \\
 & \cdot \sum_{i=1}^A g_i \langle \alpha' L' || P w_i(L) || \alpha L \rangle \langle \alpha' S || P || \alpha S \rangle
 \end{aligned}$$

Es gibt also zwei strukturell verschiedene Typen von Matrixelementen, nämlich die Bahnoperatormatrixelemente (A.26), (A.28) und (A.30) und die Spinoperatormatrixelemente (A.27) und (A.29). Alle Matrixelemente enthalten den Clebsch-Gordan-Koeffizienten $(J' j' J - j / LM)$, der die Auswahlregel für J , J' und L beinhaltet.

ANHANG 6: DIE ANALYTISCHE BERECHNUNG DER ORTSRAUMMATRIXELEMENTE

Hier werden die Matrixelemente der Ortsraumoperatoren w_j und $\tilde{w}_j$ berechnet, also die Begründung für die Gleichungen (6.7) und (6.8) geliefert.

Entsprechend den Operatoren (6.1a-e) bzw. den Matrixelementen (A.26 - A.30) ist dieser Abschnitt in die fünf Teile a) bis e) gegliedert.

- a) Für den elektrischen Bahnoperator $O(\mathbf{E}, \mathbf{LM})$ sind die Matrixelemente $\langle \alpha' l' l' | P \tilde{w}_j (L-1, 1; L l' - l) | \alpha l l \rangle$ zu berechnen. Berücksichtigt man die Gestalt der Ortsfunktionen (Gl. (5.6) und (5.7)), wendet die Permutation P an und drückt alle Koordinaten durch Jacobikoordinaten der linken Clusterzerlegung aus, so erhält man mit (6.2) für die Matrixelemente (bis auf bekannte Phasen)

$$\begin{aligned}
 & \langle \alpha' l' l' | P \tilde{w}_j (L-1, 1; L l' - l) | \alpha l l \rangle \sim \\
 & \sim \int_{\alpha' l' l}^{\text{Bahn}} (i, P, \mathbf{E} L) := \sum_{q q'} (L-1 q 1 q' | L l' - l) \int d\mathbf{s}_1 \dots d\mathbf{s}_{A-1} \\
 & \exp\left(-\sum_{\nu \mu} S'_{\nu \mu} \xi_{\nu} \cdot \xi_{\mu}\right) \left(\prod_{u=u_c}^N Q_u^{L_u} Y_{L_u M_u}(\hat{Q}_u) \right) \\
 & \cdot Q_{N+1}^{L-1} Y_{L-1 q}(\hat{Q}_{N+1}) \sum_{k=1}^{A-1} J_{k, P(i)} \mathbf{e}_{q'} \cdot \nabla_{\mathbf{s}_k} \\
 & \cdot \exp\left(-\sum_{\nu \mu} S''_{\nu \mu} \xi_{\nu} \cdot \xi_{\mu}\right) \left(\prod_{u=1}^{u_c-1} Q_u^{L_u} Y_{L_u M_u}(\hat{Q}_u) \right) .
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

Die erste Zeile des Integranden entspricht der Wellenfunktion auf der linken Seite des Matrixelementes, die dritte Zeile der Wellenfunktion rechts und die zweite Zeile dem Operator, wobei die Vektoren $\underline{Q}_n$ Linearkombinationen von Jacobikoordinaten sind (s. Anhang 7), nämlich

$$\underline{Q}_n = \sum_{\mu=1}^{A-1} f_{n\mu}(P) \underline{s}_{\mu} \quad (n = 1, \dots, N)$$

und

$$\underline{Q}_{-N+1} = P \hat{\underline{r}}_i = \tilde{\underline{r}}_{P(i)} = \sum_{k=1}^{A-1} J_{k,P(i)} \underline{s}_k \quad .$$

Die Zahl der Cluster der rechten Zerlegung ist n_{C_r} , die der linken Zerlegung n_{C_l} und $N = n_{C_l} + n_{C_r} - 2$. Gleichung (A.31) entspricht Gl.(5.21) im Falle der Norm. Statt $j_{\text{Bahn}}^{C_l}(i, P, \epsilon L)$ zu berechnen, geht man zum erzeugenden Integral über:

$$\begin{aligned} I(i, \epsilon L, a_1, b_1, \dots, a_{N+1}, b_{N+1}) &:= \sum_{q q'} (L^{-1} q^{-1} q' L \epsilon^{-1} L) e_{q'} \\ &\cdot \int d\underline{s}_1 \dots d\underline{s}_{A-1} \exp \left\{ - \sum_{\nu \mu} \underline{s}'_{\nu \mu} \underline{s}_{\nu} \underline{s}_{\mu} + \sum_{u=1}^{N+1} a_u \underline{\Delta}(b_u) \cdot \underline{Q}_u \right\} \quad (A.32) \\ &\cdot \left(\sum_{k=1}^{A-1} J_{k,P(i)} \underline{\nabla}_{\underline{s}_k} \right) \exp \left\{ - \sum_{\nu \mu} \underline{s}''_{\nu \mu} \underline{s}_{\nu} \underline{s}_{\mu} + \sum_{u=1}^{n_{C_r}-1} a_u \underline{\Delta}(b_u) \underline{Q}_u \right\} . \end{aligned}$$

Die Vektoren $\underline{\Delta}(b_n)$ sind durch die Gleichungen (5.23) bis (5.25) erklärt. Die Entwicklung der Exponentialfunktionen nach Potenzen von a_n und b_n liefert

$$\begin{aligned}
 I(i, \varepsilon L, a_1, b_1, \dots, a_{N+1}, b_{N+1}) &= \sum_{q, q'} (L^{-1} q^{-1} q' | L l' - l) e_{q'} \\
 &\cdot \sum_{l_1, u_1, \dots, l_{N+1}, u_{N+1}} \prod_{u=1}^{N+1} \frac{c_{l_u, u_{N+1}}}{l_u!} a_u^{l_u} b_u^{l_u - u_{N+1}} \\
 &\cdot \int ds_1 \dots ds_{A-1} \exp\left(-\sum_{\nu \mu} g'_{\nu \mu} \varepsilon_\nu \varepsilon_\mu\right) \left(\prod_{u=n_{cr}}^{N+1} Q_u^{l_u} Y_{l_u, u_{N+1}}(\hat{Q}_u) \right) \\
 &\cdot \left(\sum_{k=1}^{A-1} J_{k, P(i)} \sum_{\varepsilon_k} \right) \exp\left(-\sum_{\nu \mu} g''_{\nu \mu} \varepsilon_\nu \varepsilon_\mu\right) \left(\prod_{u=1}^{u_{cr}-1} Q_u^{l_u} Y_{l_u, u_{N+1}}(\hat{Q}_u) \right).
 \end{aligned}$$

Mit der Schreibweise:

$$\begin{aligned}
 I(i, \varepsilon L, a_1, b_1, \dots, a_{N+1}, b_{N+1}) &= \sum_{q, q'} (L^{-1} q^{-1} q' | L l' - l) e_{q'} \\
 &\cdot \sum_{l_1, u_1, \dots, l_{N+1}, u_{N+1}} \prod_{u=1}^{N+1} \frac{c_{l_u, u_{N+1}}}{l_u!} a_u^{l_u} b_u^{l_u - u_{N+1}} \Theta_{l_1, u_1, \dots, l_{N+1}, u_{N+1}} \quad (A.33)
 \end{aligned}$$

ergibt

$$J_{\substack{\text{Baku} \\ \leftarrow l' l l}}(i, P, \varepsilon L) = \sum_{q, q'} (L^{-1} q^{-1} q' | L l' - l) e_{q'} \cdot \Theta_{l_1, m_1, \dots, l_N, m_N, L^{-1} q}$$

das gesuchte Integral. Andererseits reproduziert die Anwendung des Differentialoperators in Gl. (A.32) die Exponentialfunktion und liefert einen zusätzlichen Faktor:

$$I(i, \varepsilon L, a_1, b_1, \dots, a_{N+1}, b_{N+1}) = \sum_{q, q'} (L^{-1} q^{-1} q' / L L' l) \underline{e}_{q'} \cdot \int d\underline{s}_1 \dots d\underline{s}_{A-1} \exp \left\{ - \sum_{\nu, \mu}^A s_{\nu\mu} \underline{s}_\nu \cdot \underline{s}_\mu + \sum_{u=1}^{N+1} a_u \Delta(b_u) \underline{Q}_u \right\} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{A-1} J_{k, P(i)} \left[- \sum_{\mu}^{A-1} (s_{k\mu}'' + \underline{e}_{\mu k}'') \underline{s}_\mu + \sum_{u=1}^{u_k-1} a_u \Delta(b_u) \underline{f}_{uk} \right] \right\}.$$

Hierbei wurde $s_{\nu\mu} := s_{\nu\mu}' + s_{\nu\mu}''$ gesetzt.

Mit der Hauptachsentransformation

$$\underline{s}_\mu = \sum_{\lambda=1}^{A-1} T_{\mu\lambda} \underline{t}_\lambda \quad (\mu = 1, \dots, A-1),$$

$$T_{\lambda\lambda} = 1 \quad (\lambda = 1, \dots, A-1), \quad \sum_{\nu, \mu=1}^{A-1} s_{\nu\mu} \underline{s}_\nu \cdot \underline{s}_\mu = \sum_{\lambda=1}^{A-1} \beta_\lambda \underline{t}_\lambda^2$$

$$\text{und} \quad \underline{Q}_u = \sum_{\mu=1}^{A-1} P_{u\mu} \underline{t}_\mu$$

erhält man:

$$I(i, \varepsilon L, a_1, \dots, b_{N+1}) = \sum_{q, q'} (L^{-1} q^{-1} q' / L L' l) \underline{e}_{q'} \cdot$$

$$\cdot \int d\underline{t}_1 \dots d\underline{t}_{A-1} \exp \left\{ - \sum_{\lambda=1}^{A-1} (\beta_\lambda \underline{t}_\lambda^2 - \sum_{u=1}^{N+1} a_u \Delta(b_u) P_{u\lambda} \underline{t}_\lambda) \right\} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{A-1} J_{k, P(i)} \left[- \sum_{\lambda \geq \mu} (s_{k\mu}'' + \underline{e}_{\mu k}'') T_{\mu\lambda} \underline{t}_\lambda + \sum_{u=1}^{u_k-1} a_u \Delta(b_u) \underline{f}_{uk} \right] \right\}.$$

Mit der Definition

$$\underline{c}_\lambda := \sum_{u=1}^{N+1} a_u \underline{1}(b_u) P_{u\lambda}$$

und der in der statistischen Physik üblichen Methode gelangt man zu

$$\begin{aligned} I(i, \varepsilon L, a_1, \dots, b_{N+1}) &= \sum_{q q'} (L^{-1} q^{-1} q' / L^{\ell'-\ell}) \underline{e}_{q'} \\ &\cdot \left\{ \sum_{k=1}^{A-1} J_{k, P(i)} \left[- \sum_{\substack{\lambda, \mu \\ \lambda \geq \mu}} (S''_{k\mu} + S''_{\mu k}) T_{\mu\lambda} \underline{c}_\lambda + \sum_{u=1}^{u_k-1} a_u \underline{1}(b_u) \{f_{uk}\} \right] \right\} \\ &\cdot \left(dt_{-1} \dots dt_{A-1} \exp \left(- \sum_{k=1}^{A-1} \beta_k t_k^2 + \sum_{k=1}^{A-1} \underline{c}_k \cdot \underline{t}_k \right) \right) . \end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung und Elimination der Vektoren $\underline{c}_\lambda$ liefert schließlich

$$\begin{aligned} I(i, \varepsilon L, a_1, \dots, b_{N+1}) &= \sum_{q q'} (L^{-1} q^{-1} q' / L^{\ell'-\ell}) \underline{e}_{q'} \cdot \\ &\cdot \left\{ \sum_{u=1}^{N+1} K_u a_u \underline{1}(b_u) \right\} \cdot I(a_1, b_1, \dots, a_{N+1}, b_{N+1}) , \end{aligned}$$

wobei

$$K_u := \sum_{k=1}^{A-1} J_{k, P(i)} \left[- \sum_{\substack{\lambda, \mu \\ \lambda \geq \mu}} (S''_{k\mu} + S''_{\mu k}) \frac{T_{\mu\lambda} P_{u\lambda}}{2\beta_\lambda} + \theta(u_k - 1 - u) \{f_{uk}\} \right] \quad (A.34)$$

und $I(a_1, b_1, \dots, a_{N+1}, b_{N+1})$ ein normähnliches erzeugendes Integral (Ho 84 b) ist, mit dem einzigen Unterschied, daß die Zahl der erzeugenden Parameter um 1 vergrößert ist ($N \rightarrow N+1$).

Gleichung (5.27) für $I(a_1, \dots, b_{N+1})$ ergibt:

$$I(i, \epsilon L, a_1, \dots, b_{N+1}) = \sum_{q, q'} (L-1 q' 1 q' / L l' l) e_{q'} \cdot \left\{ \sum_{u=1}^{N+1} h_u a_u \frac{1}{b_u} \right\}$$

$$\sum_{l_1 u_1 \dots l_{N+1} u_{N+1}} \prod_{k=1}^{N+1} \frac{C_{l_k u_k}}{l_k!} a_k^{l_k} b_k^{u_k} \Gamma_{l_1 u_1 \dots l_{N+1} u_{N+1}}$$

Hierbei sind die $\Gamma_{l_1 u_1 \dots l_{N+1} u_{N+1}}$ die bekannten Normintegrale. Dies wird nun nach Potenzen von a_n und b_n entwickelt und mit Gl.(A.33) verglichen. So erhält man schließlich die gesuchten Integrale

$$\begin{aligned} J_{\substack{l' l' l \\ l' l' l}}^{\text{Baku}}(i, \epsilon L) &= \sum_{q, q'} (L-1 q' 1 q' / L l' l) e_{q'} \cdot \frac{\theta}{L_1 M_1 \dots L_N M_N L-1 q} \\ &= \sum_{u=1}^{N+1} K_u \frac{L_u}{C_{L_u M_u}} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} &\cdot \left\{ \sqrt{2} C_{L_u-1 M_u+1} (L-1 l' l-1 1 1 / L l' l) \Gamma_{L_1 M_1 \dots L_u-1 M_u+1 \dots L_N M_N L-1 l' l-1} \right. \\ &- 2 C_{L_u-1 M_u} (L-1 l' l-1 0 / L l' l) \Gamma_{L_1 M_1 \dots L_u-1 M_u \dots L_N M_N L-1 l' l} \\ &\left. + \sqrt{2} C_{L_u-1 M_u-1} (L-1 l' l+1 1 -1 / L l' l) \Gamma_{L_1 M_1 \dots L_u-1 M_u-1 \dots L_N M_N L-1 l' l+1} \right\} \end{aligned}$$

Es ist also gelungen, Matrixelemente des Operators $\tilde{W}_i(L-1, 1; L l' l)$ auf eine Summe von Normintegralen zurückzuführen, wobei bei der Summation über n jeweils der n -te Drehimpuls L_n um 1 erniedrigt wird (falls $L_n \neq 0$). Dies ist eine Folge des Differentialoperators. Die zu $L_n - 1$ gehörigen neuen z -Quantenzahlen $M_n + 1$, M_n oder $M_n - 1$ müssen natürlich zwischen $-(L_n - 1)$ und $L_n - 1$ liegen. Die Faktoren K_n enthalten die Information über die Permutation, das wechselwirkende Teilchen und die Koordinatentransformation.

- b) Für den elektrischen Spinoperator müssen Matrixelemente von $w_i(LM)$ (siehe Gleichung (6.2) und (A.27)) berechnet werden. Anwenden der Permutation und Übergang auf Jacobikoordinaten der linken Clusterzerlegung ergibt:

$$\begin{aligned} & \langle \alpha' l' l' | P w_i(L l' l) | \alpha l l \rangle \sim \\ & \sim \int_{\alpha' l' l}^{Spin} (i, P, \epsilon L) := \int ds_1 \dots ds_{A-1} \exp\left(-\sum_{\nu\mu} s_{\nu\mu} \epsilon_\nu \cdot \epsilon_\mu\right) \\ & \cdot \left(\prod_{u=1}^N Q_u^{L_u} Y_{L_u M_u}(\hat{Q}_u) \right) \cdot Q_{N+1}^L Y_{L l' l}(\hat{Q}_{N+1}), \end{aligned}$$

wobei die Vektoren Q_n wieder Linearkombinationen von Jacobikoordinaten sind. Dies ist aber ein Normintegral und ist deshalb gegeben durch

$$\int_{\alpha' l' l}^{Spin} (i, P, \epsilon L) = \int_{L_1 M_1 \dots L_N M_N L l' l} \quad (A.36)$$

- c) Für den magnetischen Bahnoperator benötigt man Matrixelemente von $\tilde{w}_i(L, 1; LM)$ (s. Gl. (6.2) und (A.28)). Diese sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} & \langle \alpha' l' l' | P \tilde{w}_i(L, 1; LM) | \alpha l l \rangle \sim \\ & \sim \int_{\alpha' l' l}^{Bahn} (i, P, M L) := \sum_{q q'} (L q 1 q' | L l' l) e_q' \cdot \int ds_1 \dots ds_{A-1} \\ & \cdot \exp\left(-\sum_{\nu\mu} s'_{\nu\mu} \epsilon_\nu \cdot \epsilon_\mu\right) \left(\prod_{u=u_q}^N Q_u^{L_u} Y_{L_u M_u}(\hat{Q}_u) \right) \\ & \cdot Q_{N+1}^L Y_{L q}(\hat{Q}_{N+1}) \left(\sum_{k=1}^{A-1} J_{k, P(i)} \nabla_{\epsilon_k} \right) \\ & \cdot \exp\left(-\sum_{\nu\mu} s''_{\nu\mu} \epsilon_\nu \cdot \epsilon_\mu\right) \left(\prod_{u=1}^{u_q-1} Q_u^{L_u} Y_{L_u M_u}(\hat{Q}_u) \right). \end{aligned}$$

Der Vergleich mit dem elektrischen Bahnoperator (A.31) zeigt

$$\begin{aligned} \int_{\alpha' l' \alpha l}^{\text{Bahn}} (i, P, \mathcal{M} L) &= \sum_{q q'} (L q' 1 q' | L l' l) \epsilon_{q' l'} \frac{L}{L_1 M_1 \dots L_N M_N L q} \\ &= \sum_{u=1}^{N+1} K_u \frac{L_u}{L_u M_u} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \sqrt{2} C_{L_{u-1} M_{u-1}} (L l' l' - 1 1 | L l' l) \Gamma_{L_1 M_1 \dots L_{u-1} M_{u-1} \dots L_N M_N L l' l - 1} \right. \\ &- 2 C_{L_{u-1} M_{u-1}} (L l' l' 1 0 | L l' l) \Gamma_{L_1 M_1 \dots L_{u-1} M_{u-1} \dots L_N M_N L l' l} \\ &\left. + \sqrt{2} C_{L_{u-1} M_{u-1}} (L l' l' + 1 - 1 | L l' l) \Gamma_{L_1 M_1 \dots L_{u-1} M_{u-1} \dots L_N M_N L l' l + 1} \right\} \end{aligned}$$

d) Der magnetische Spinoperator enthält die Matrixelemente (s. Gl. (6.2) und (A.29)):

$$\begin{aligned} &\langle \alpha' l' l' | P w_i (L-1 l' l) | \alpha l l \rangle \sim \\ &\sim \int_{\alpha' l' \alpha l}^{\text{Spin}} (i, P, \mathcal{M} L) := \int d s_1 \dots d s_{A-1} \exp \left(- \sum_{\nu \mu} s_{\nu \mu} \varepsilon_{\nu} \varepsilon_{\mu} \right) \\ &\cdot \left(\prod_{u=1}^N Q_u^{L_u} \gamma_{L_u M_u}(\hat{Q}_u) \right) \cdot Q_{N+1}^{L-1} \gamma_{L-1 l' l}(\hat{Q}_{N+1}) \end{aligned}$$

die gegeben sind durch:

$$J_{\alpha'l'\alpha l}^{Spin}(i, P, \mathcal{M}L) = \prod_{L_1 M_1 \dots L_N M_N} L_{-1} l' - l \quad (A.38)$$

-) Schließlich benötigen wir noch das Ortsraummatrixelement für den elektrischen Siegert-Theorem-Operator (Gl. (A.30))

$$\langle \alpha l' l' | P W_i(L l' - l) | \alpha l l \rangle \sim J_{\alpha'l'\alpha l}^{ST}(i, P, \mathcal{E}L)$$

Dies ist aber bereits bekannt und durch Gl. (A.36) gegeben:

$$J_{\alpha'l'\alpha l}^{ST}(i, P, \mathcal{E}L) = J_{\alpha'l'\alpha l}^{Spin}(i, P, \mathcal{E}L) = \prod_{L_1 M_1 \dots L_N M_N} L l' - l \quad (A.39)$$

Damit ist es gelungen, die Matrixelemente der elektromagnetischen Multipoloperatoren durch Normintegrale, einen "Drehimpuls" mehr enthaltend, auszudrücken.

ANHANG 7: JACOBIKOORDINATEN

Wir betrachten beliebige Einteilchenkoordinaten $\underline{r}_i (i = 1, \dots, A)$ und Einteilchenkoordinaten $\tilde{\underline{r}}_i (i = 1, \dots, A)$ vom Schwerpunkt der A Nukleonen aus betrachtet, wobei gilt

$$\tilde{\underline{r}}_i = \underline{r}_i - \underline{R}_{CM} \quad (A.40)$$

Die Jacobikoordinaten $\underline{s}_i (i = 1, \dots, A)$ seien gegeben durch

$$\underline{s}_i = \sum_{j=1}^A J_{ij} \underline{r}_j \quad (i = 1, \dots, A) \quad (A.41)$$

wobei die $(A \times A)$ -Matrix (J_{ij}) in dem hier verwendeten Modell orthogonal gewählt wird, sodaß die Umkehrung von (A.41) lautet:

$$\underline{r}_i = \sum_{j=1}^A J_{ji} \underline{s}_j \quad (i = 1, \dots, A) \quad (A.42)$$

Bei der Transformation (A.41) geht man auf interne Koordinaten innerhalb der einzelnen Cluster, auf Relativkoordinaten zwischen den Clustern innerhalb der Fragmente und auf die Relativkoordinate zwischen den beiden Fragmenten über. Der letzte Jacobikoordinatenvektor ist proportional zum Schwerpunktsvektor. Die Einführung von Clusterrelativkoordinaten ermöglicht, die Anregung, d. h. die Drehimpulse nur zwischen die Cluster zu verteilen, sodaß sich die Teilchen innerhalb der Cluster in relativen S-Zuständen befinden. So ist die Koordinatenwahl dem Ansatz der Wellenfunktion (Gl. 5.5) als Produkt von clusterinternen und clusterrelativen Funktionen angepaßt. Diese Wahl der Koordinaten stellt einen Unterschied dar zu anderen Methoden (Ta 81), die Generator-Koordinaten-Techniken verwenden.

Für $A = 7$ und die Clusterzerlegung $[4, 3]$ z. B., wo die beiden Fragmente jeweils nur aus einem Cluster bestehen, gilt:

$$(J_{ij}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\sqrt{\frac{3}{28}} & -\sqrt{\frac{3}{28}} & -\sqrt{\frac{3}{28}} & -\sqrt{\frac{3}{28}} & \sqrt{\frac{4}{21}} & \sqrt{\frac{4}{21}} & \sqrt{\frac{4}{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}$$

Für diesen Fall werden die Jacobikoordinaten in Fig. A.1 bis auf die Verlängerungsfaktoren, damit die Matrix (J_{ij}) orthogonal wird, veranschaulicht.

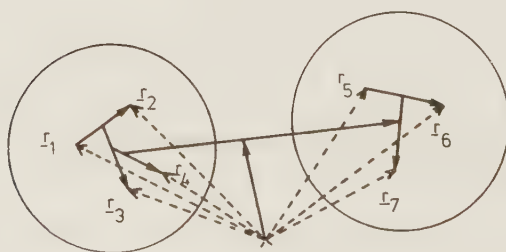


Fig. A.1: Die gestrichelten Vektoren sind die Einteilchenkoordinaten, die durchgezogenen Vektoren sind proportional zu den Jacobikoordinaten.

Wegen $\underline{R}_{CM} = \frac{1}{\sqrt{A}} \underline{s}_A$ und $J_{Ai} = \frac{1}{\sqrt{A}}$ ($i = 1, \dots, A$) erhält man aus (A.40) mit (A.42):

$$\tilde{r}_i = \sum_{j=1}^{A-1} J_{ji} \underline{s}_j \quad (i = 1, \dots, A) \quad . \quad (A.43)$$

Damit hängen die betrachteten translationsinvarianten Operatoren nur von den $A-1$ internen Jacobikoordinaten ab.

Die Umkehrung von (A.43) lautet wegen (A.40) und (A.41)

$$\underline{s}_i = \sum_{j=1}^A J_{ij} (\tilde{r}_i + \underline{R}_{CM}) \quad (i = 1, \dots, A-1) \quad . \quad (A.44)$$

Wegen $\sum_{j=1}^A J_{ij} = 0$ ($i = 1, \dots, A-1$) bedeutet dies:

$$\underline{s}_i = \sum_{j=1}^A J_{ij} \tilde{r}_j \quad (i = 1, \dots, A-1) \quad . \quad (A.45)$$

Sei nun $f(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_A)$ eine differenzierbare Funktion der Koordinaten $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_A$ und es gelte

$$f(\tilde{r}_1(\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_{A-1}), \dots, \tilde{r}_A(\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_{A-1})) =: g(\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_{A-1}) ,$$

so erhält man

$$\nabla_{\tilde{r}_i} f = \sum_{j=1}^{A-1} \nabla_{\tilde{r}_i} \underline{s}_j(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_A) \cdot \nabla_{\underline{s}_j} g \quad (i = 1, \dots, A)$$

und wegen (A.44):

$$\nabla_{\tilde{r}_i} = \sum_{j=1}^{A-1} J_{ji} \nabla_{\underline{s}_j} \quad (i = 1, \dots, A) \quad . \quad (A.46)$$

Mit (A.43) und (A.46) ist also bekannt, wie Einteilchen(-Differential)-operatoren durch die internen Jacobikoordinaten ausgedrückt werden.

ANHANG 8: DIE PARAMETER DER WELLENFUNKTIONEN

Für den Grundzustand und die drei angeregten $T=0$ -Zustände von ${}^6\text{Li}$ verwenden wir die Dreiclusterwellenfunktion (7.1) (s. Fig. 7.1)

$$\psi_{6\text{Li}}^{J\pi} = A \left\{ \exp\left(-\frac{\beta}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (r_i - r_j)^2 - \gamma s_4^2\right) \sum_{u=1}^2 \sum_{l_1, l_2=0,2}^L \right. \\ \left. \cdot c_u^{l_1 l_2 L} \exp(-\delta_u s_5^2) \left[\left[Y_{l_1}(s_4) \otimes Y_{l_2}(s_5) \right]^L \otimes \equiv 1 \right]^J \right\}. \quad (\text{A.46})$$

Die Weiteparameter sind $\beta = 0.283815$, $\gamma = 0.355444$, $\delta_1 = 0.113875$ und $\delta_2 = 0.0243673$. Die Koeffizienten $c_n^{l_1 l_2 L}$ aus der Diagonalisierung des Hamiltonian und die Anregungsenergien E_{exc} der Zustände sind in Tabelle A.1 gegeben.

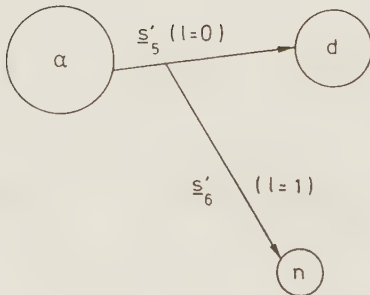


Fig. A.2:
Veranschaulichung der Jacobi-relativivkoordinaten s'_5 und s'_6 der ${}^6\text{Li}+n$ -Struktur der Wellenfunktion WF 4.

Tabelle A.1: Überlagerungskoeffizienten in Einheiten von 10^{-4} , berechnete und experimentelle Anregungsenergien von ${}^6\text{Li}$

J^π	1^+	3^+	2^+	1^{+*}
c_1^{000}	69.62249	-	-	.2996561
c_2^{000}	27.32244	-	-	1.225141
c_1^{202}	4.778985	-8.450938	3.596788	.2874886
c_2^{202}	3.677993	.7118640	-.3397726	.1208331
c_1^{022}	.9275379	10.18290	-4.862204	1.004754
c_2^{022}	-.0426801	.2957371	-.7178998	.8936680
c_1^{220}	.2784702	-	-	.1419520
c_2^{220}	-.004057184	-	-	.04559660
c_1^{221}	.2973501	-	.3821340	.08902166
c_2^{221}	-.006781358	-	.02198583	.06985129
c_1^{222}	-.1544403	.1069411	.4929256	.03847376
c_2^{222}	-.0003192359	.006595319	.04765659	.06143241
c_1^{223}	-	.5069848	.4253242	-
c_2^{223}	-	.01573976	.06239739	-
c_1^{224}	-	1.207767	-	-
c_2^{224}	-	.02814393	-	-
E_{exc}	0	3.32	4.85	5.37
$E_{\text{exc}}^{\text{exp}} \text{ (Aj 84)}$	0	2.185	4.31	5.65

Tabelle A.2: Die Parameter der Wellenfunktion WF 1 für ${}^7\text{Li}$ und ${}^7\text{Be}$

J	M	m	β_m	γ_m	δ_m	$10^4 \cdot c_m ({}^7\text{Li})$	$10^4 \cdot c_m ({}^7\text{Be})$
$\frac{3}{2}$	2	1	.2846	.2760	.0624	1.308786	1.289560
		2	.2846	.1057	.0624	.1066897	.1140432
$\frac{1}{2}$	2	1	.2846	.2760	.0624	1.288803	1.268956
		2	.2846	.1057	.0624	.1143315	.1218563

Tabelle A.3: Die Parameter von WF 2 für ${}^7\text{Li}$

J	M	m	β_m	γ_m	δ_m	$10^4 \cdot c_m ({}^7\text{Li})$
$\frac{3}{2}$	2	1	.2846	.2760	.0624	1.308786
		2	.2846	.1057	.0624	.1066897
$\frac{1}{2}$	2	1	.2846	.2760	.041146	.6438167
		2	.2846	.1057	.041146	.07788397

Tabelle A.4: Die Parameter der Wellenfunktion WF 3 für ${}^7\text{Li}$ und ${}^7\text{Be}$
(mit $M = 8$ in Gl. (A.47))

m	β_m	γ_m	$\delta_m({}^7\text{Li})$	$10^4 c_m({}^7\text{Li}(\frac{3}{2}^-))$	$10^4 c_m({}^7\text{Li}(\frac{1}{2}^-))$	$\delta_m({}^7\text{Be})$	$10^4 c_m({}^7\text{Be}(\frac{3}{2}^-))$
1	.2846	.2760	.1835	3.491275	1.470272	.1839	3.267841
2			.0591	.6055209	.6218471	.0582	.5770883
3			.0193	.05196178	.06861927	.0177	.04949332
4			.006	.0002644775	.003701068	.006	.0005791909
5	.2846	.1057	.1835	-.7641708	-.6817810	.1839	-.7665661
6			.0591	.1064440	.08787120	.0582	.1066988
7			.0193	.009219032	.01485966	.0177	.009549499
8			.006	.0001204923	.0006046924	.006	.0001897340

Die Zweicusterfunktion für ${}^7\text{Li}$ und ${}^7\text{Be}$ ist gegeben durch (Gl. (7.2)):

$$\psi_{A=7}^{j\pi} = \mathcal{A} \left\{ \sum_{u=1}^M c_u \exp \left(-\frac{1}{4} \beta_u \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (r_i - r_j)^2 - \frac{1}{3} \gamma_u \sum_{5 \leq i < j \leq 7} (r_i - r_j)^2 - \delta_u \xi_6^2 \right) \right. \\ \left. \left[Y_1(\xi_6) \otimes \equiv^{1/2} \right]^J \right\} \quad (\text{A.47})$$

Die Parameter für die Funktionen WF 1 und WF 2 lassen sich Tab. A.2 und A.3 entnehmen. Beide Funktionen besitzen als Relativfunktion nur eine Gaußfunktion.

Eine Wellenfunktion der Form (A.47), bestehend aus einer Überlagerung von vier Gaußfunktionen als Relativfunktion, ist WF 3, gegeben in Tab. A.4. Diese Wellenfunktion hat näherungsweise die richtige Asymptotik einer Whittakerfunktion.

Die Funktion WF 4 ist eine Überlagerung einer $\alpha + {}^3\text{H}$ (${}^3\text{He}$) - Struktur und einer Dreicuster - ${}^6\text{Li} + n(p)$ - Zerlegung und gegeben durch

$$\psi_{A=7}^{j\pi} = \mathcal{A} \left\{ \left[\sum_{u=1}^2 d_u \exp \left(-\frac{1}{4} \beta_u \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (r_i - r_j)^2 - \frac{1}{3} \gamma_u \sum_{5 \leq i < j \leq 7} (r_i - r_j)^2 \right) \right] \right. \\ \cdot \left(\sum_{u=1}^4 c_u \exp(-\delta_u \xi_6^2) \right) \cdot \left[Y_1(\xi_6) \otimes \equiv^{1/2} \right]^J \\ + \exp \left(-\frac{1}{4} \beta' \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (r_i - r_j)^2 - \frac{1}{2} \gamma' (r_5 - r_6)^2 - \varepsilon' \xi_5^2 \right) \\ \cdot \left(\sum_{u=1}^2 c'_u \exp(-\delta'_u \xi_6'^2) \left[Y_0(\xi_5') Y_1(\xi_6') \otimes \equiv^{3/2} \right]^J \right. \\ \left. + \sum_{u=3}^4 c'_u \exp(-\delta'_u \xi_6'^2) \left[Y_0(\xi_6') Y_1(\xi_6') \otimes \equiv^{1/2} \right]^J \right) \left. \right\} \quad (\text{A.48})$$

Der erste Summand in Gl. (A.48) beschreibt analog Gl. (A.47) die $\alpha + {}^3\text{H}$ (${}^3\text{He}$)-Struktur, wobei die beiden Sätze interner Weiten ($\beta_1 = \beta_2 = .2846$, $\gamma_1 = .2760$, $\gamma_2 = .1057$) mit den Koeffizienten $d_1 = 0.1544214$ und $d_2 = 0.03013759$ für ${}^7\text{Li}$ und $d_1 = 0.1500742$ und $d_2 = 0.03119584$ für ${}^7\text{Be}$ überlagert sind. Der zweite Summand beschreibt die ${}^6\text{Li} + n(p)$ -Struktur, wobei die Jacobikoordinaten $\underline{s}_5$ und $\underline{s}_6$ sich auf diese Clusterzerlegung beziehen (s. Fig. A.2). Das Fragment ${}^6\text{Li}$ besitzt keinen internen Drehimpuls ($\gamma_0(\underline{s}_5)$), das Nukleon hat den Relativdrehimpuls 1 ($\gamma_1(\underline{s}_6)$). Weiterhin kann der Spin des Nukleons mit dem Spin 1 von ${}^6\text{Li}$ zur Gesamtspinfunktion $\underline{\underline{3}}^{1/2}$ oder $\underline{\underline{1}}^{1/2}$ gekoppelt werden. Die Weiteparameter für diese Clusterzerlegung sind $\beta' = .2863$, $\gamma' = .2398$, $\epsilon' = .0972$ für ${}^7\text{Li}$ und $\epsilon' = .0916$ für ${}^7\text{Be}$.

Die Relativweiten für ${}^7\text{Li}$ sind $\delta_1 = .3020$, $\delta_2 = .0725$, $\delta_3 = .0251$, $\delta_4 = .007$, $\delta'_1 = \delta'_3 = .3019$ und $\delta'_2 = \delta'_4 = .0524$. Für ${}^7\text{Be}$ ($\frac{3}{2}^-$) werden $\delta_1 = .2972$, $\delta_2 = .0713$, $\delta_3 = .0243$, $\delta_4 = .007$, $\delta'_1 = \delta'_3 = .2971$, $\delta'_2 = \delta'_4 = .0517$ verwendet, für ${}^7\text{Be}^* (\frac{1}{2}^-)$ statt δ_1 bis δ_4 nur drei Weiten, nämlich $\delta_1 = .2451$, $\delta_2 = .0353$ und $\delta_3 = .008$. Die Überlagerungskoeffizienten für die Relativweiten δ_{uu} und δ'_{uu} entnimmt man Tab. A.5.

Die Bindungsenergien relativ zur Schwelle, d. h. die Clusterseparationsenergien E_{J1} für WF 4 sind in Tabelle A.6 gegeben.

Tabelle A.5: Überlagerungskoeffizienten für WF 4 in Einheiten von 10^{-4}

m	$c_m(^7\text{Li}(\frac{3}{2}^-))$	$c'_m(^7\text{Li}(\frac{3}{2}^-))$	$c_m(^7\text{Li}(\frac{1}{2}^-))$	$c'_m(^7\text{Li}(\frac{1}{2}^-))$
1	29.02589	6.457142	13.82229	1.679194
2	-4.325235	.1437062	-1.100181	.07203156
3	-.5411623	-.7637309	-.9297953	-7.273980
4	-.002734359	-.4356209	.01608352	-.7925293
m	$c_m(^7\text{Be}(\frac{3}{2}^-))$	$c'_m(^7\text{Be}(\frac{3}{2}^-))$	$c_m(^7\text{Be}(\frac{1}{2}^-))$	$c'_m(^7\text{Be}(\frac{1}{2}^-))$
1	27.63829	-5.526983	18.52890	-1.231284
2	-3.990923	.1309644	-1.608514	-.06506219
3	-.5559231	.6915828	-.02437262	6.723925
4	-.006055807	.4538927	0.	.7304928

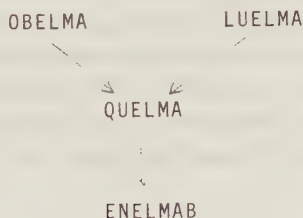
Tabelle A.6: Berechnete und experimentelle Clusterseparationsenergien für die Funktion WF 4

E_{J1}/MeV	Theorie	Experiment (Aj 84)
$^7\text{Li}(\frac{3}{2}^-)$	2.44	2.47
$^7\text{Li}(\frac{1}{2}^-)$	1.97	1.99
$^7\text{Be}(\frac{3}{2}^-)$	1.60	1.59
$^7\text{Be}(\frac{1}{2}^-)$	1.19	1.16

ANHANG 9: STRUKTUR DER PROGRAMMKETTEN

a) Übergänge zwischen gebundenen Zuständen

Für die in Kapitel 4 genannten Observablen, die zwei gebundene Zustände verknüpfen, müssen zunächst die Wellenfunktion(en) der Zustände bestimmt werden. Innerhalb des Modellraumes wird der Ortsanteil der Wellenfunktion wie bisher in einer RGM-Rechnung bestimmt: Die Weiten β und γ der Gauß-funktionen (Gl. (5.6) und (5.7)) werden in einer Variationsrechnung ermittelt. Die Überlagerungskoeffizienten C_α aus Gl. (5.4) werden in einer Bindungsrechnung bestimmt. Dabei wurde das Programm ENPO (bzw. ENDM) so geändert (Programm ENPOP), daß die Relativfunktion zwischen den beiden Fragmenten als Tabelle hergestellt wird und damit gezeichnet werden kann. Die Matrixelemente und die Observablen werden dann analog der herkömmlichen RGM-Rechnung berechnet.



In OBELMA werden die reduzierten Spinmatrixelemente berechnet. In LUELMA wird die Berechnung der Ortsraummatrixelemente vorbereitet. In QUELMA werden die reduzierten Ortsraummatrixelemente berechnet und mit den reduzierten Spinmatrixelementen multipliziert. In ENELMAB erfolgt schließlich die Berechnung der Gleichungen (A.26) bis (A.30) und der betrachteten Observablen. Die Konvention ist so gewählt, daß in ENELMAB nur Photonenabsorption betrachtet wird, wobei der Endzustand links im Matrixelement steht.

Ganz analog erfolgt die Berechnung des Zweiteilchenanteils der Operatoren $T(2,q)$ und $T(0,0)$. Die Spinmatrixelemente sind dabei die der Coulombwechselwirkung. Die Ortsmatrixelemente werden in LUSE1, QUASE1 berechnet, die Größen $S(\in 1)$ und α für Gl. (4.36) in ENSE1.

OBER

LUSE1

QUASE1

ENSE1

b) Übergänge zwischen einem gebundenen Zustand und einem Streuzustand.

Außer der Wellenfunktion des gebundenen Zustandes muß die Streuwellenfunktion bestimmt werden. Dies geschieht in einer herkömmlichen RGM-Rechnung mit dem Kohn-Hulthénschen-Variationsprinzip (Gl. 5.8). Das Programm VESOPD (bzw. VERSTR) mußte dazu so geändert werden (Programm VERSEM), daß nicht nur die Reaktanzmatrixelemente $a_{\kappa\lambda}$, sondern auch die Koeffizienten $b_{\lambda\kappa m}$ (s. Gl. (5.10)) und damit die Koeffizienten $c_{\lambda\kappa m}$ (s. Gl. (5.10')) berechnet werden. Die Berechnung der reduzierten Matrixelemente der elektromagnetischen Operatoren erfolgt dann in den Programmen OBELMA, LUELMA, QUELMA und ENELMAS. Insbesondere berechnet das Programm ENELMAS reduzierte Matrixelemente zwischen dem gebundenen Zustand und den Basisfunktionen, nach denen die Streufunktion entwickelt wird.

Anschließend wird in ASFAK der winkelintegrierte Fusionwirkungsquerschnitt und astrophysikalische S-Faktor bzw. in TAU die Größe $S(E_1)$ und für $i = f$ die Polarisierbarkeit α (Gl. (4.35)) berechnet.

ANHANG 10: TESTS DER PROGRAMME

Um sich von der Richtigkeit der neu geschriebenen Programme zu überzeugen, d. h. um die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Fehlern zu verringern, wurden außer trivialem Nachrechnen gewisser Programnteile folgende Fälle explizit überprüft.

1. Von Hand wurden berechnet:

- die Matricelemente der Operatoren $O(E2)$, $O'(E2)$, $O(M1)$, $O'(M1)$, $O_{ST}(E2)$ und des Zweiteilchenanteils von $T(2)$ und $T(0)$ für ein Deuteron, bestehend aus einer Überlagerung von zwei Gaußfunktionen und sowohl s- als auch d-Welle enthaltend,
- die Matricelemente des Operators $O_{ST}(E1)$ zwischen den Zweinukleonenzuständen $|i\rangle = |l=1, S=1, J=2\rangle$ und $|f\rangle = |l'=0, S'=1, J'=1\rangle$,
- die Matricelemente des Operators $O_{ST}(E1)$ zwischen den ${}^7\text{Be}$ -Zuständen $|i\rangle = |\alpha + {}^3\text{He}, l=1, S=\frac{1}{2}, J=\frac{3}{2}\rangle$ und $|f\rangle = |\alpha + {}^3\text{He}, l'=0, S'=\frac{1}{2}, J'=\frac{1}{2}\rangle$ für die Permutation $P = \text{id}$.

2. Für die Grundzustandswellenfunktionen von ${}^2\text{H}$, ${}^5\text{Li}$ und ${}^7\text{Li}$ wurden folgende Spezialfälle überprüft:

- Für $g_{S_i} = 1$ ($i = 1, \dots, A$) erhält man aus dem magnetischen Spinoperator die M-te sphärische Komponente des Spins $\underline{S}$:

$$O'(M, 1M) = \frac{e\hbar}{2mc} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} S_M$$

- Für $g_{L_i} = 1$, $g_{S_i} = 1$ ($i = 1, \dots, A$) erhält man ganz analog die M-te sphärische Komponente des Gesamtdrehimpulses J :

$$O(M, 1M) + O'(M, 1M) = \frac{e\hbar}{2mc} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} J_M$$

- Der Ladungszahloperator ist gegeben durch $\sqrt{4\pi} O_{ST}(E, 00)$, so daß gelten muß:

$$\sqrt{4\pi} \langle JJ | O_{ST}(E, 00) | JJ \rangle = Ze$$

3. Für die Schalenmodellwellenfunktion der $J = \frac{3}{2}$ - und $J = \frac{1}{2}$ -Grundzustände von ${}^5\text{Li}$ wurden die Übergangsmatrixelemente von $0_{ST}(\in 1)$, $0(M1) + 0'(M1)$, die magnetischen Momente $\mu(J = \frac{3}{2})$, $\mu(J = \frac{1}{2})$, $\Omega(J = \frac{3}{2})$ und das Quadrupolmoment $Q(J = \frac{3}{2})$ mit einem Schalenmodellcode (Me 83) verglichen.
4. Alle berechneten Quadrupolmomente stimmen mit einem von dieser Arbeit völlig unabhängig erstellten Programm (Ho 84 c) zur Berechnung von mittleren quadratischen Radien und des Quadrupolmoments überein.
5. Um die Berechnung des Strahlungseinfangs zu überprüfen, wurde versucht, die Rechnung von Kajino und Arima (Ka 84a, Ka 84b) und von Liu et al. (Li 81, Wa 85) nachzuvollziehen. Beide Arbeiten unterscheiden sich von dem hier verwendeten Modell in der Methode, die Schrödingergleichung zu lösen, in der Berechnung der Matrixelemente und im Ansatz für die Wellenfunktion des gebundenen Zustands. Im Rahmen der hierauf zurückgehenden Ungenauigkeit stimmen die Ergebnisse überein und die Abweichungen können mit dem unterschiedlichen asymptotischen Verhalten des gebundenen Zustands erklärt werden. Eine ausführlichere Diskussion erfolgt in Kapitel 7.2.
6. Eine Aussage über die numerische Stabilität der Rechnung erhält man dadurch, daß der Einfangquerschnitt auf vier verschiedene Methoden berechnet wird: mit der sog. A-Methode (erläutert in dieser Arbeit) und mit der sog. B-Methode (Vertauschung der Rollen der regulären und irregulären Coulombfunktionen hinsichtlich der Randbedingungen), jeweils mit und ohne Kato-korrektur (Ho 84b). In den meisten Fällen liefern mindestens drei der vier Methoden gleiche Ergebnisse, nur beim S-Wellen-M1-Einfang stimmen oft nur zwei der vier Methoden überein.

Da alle diese Tests positiv verlaufen sind und da ja sehr unterschiedliche Fälle getestet wurden (elektrische und magnetische Operatoren, Zweiclustern- und Dreiclustersysteme, Zwei-, Fünf-, Sechs- und Siebenteilchensysteme), kann davon ausgegangen werden, daß die Computerprogramme für Systeme bis zu drei Clustern korrekte Ergebnisse liefern.

ANHANG 11: KURZBESCHREIBUNG DES INPUTS

Hier wird die Kenntnis des Inputs der herkömmlichen RGM-Programmkette vorausgesetzt (Ho 84b). Die Eingabe erfolgt im Format 2013 bzw. 6E12.4, falls nicht auf ein anderes Format extra hingewiesen wird. Außerdem werden im folgenden nur die Datenkarten angegeben, die im Vergleich zum herkömmlichen Programm verschieden sind. Diese werden mit ihrer Nummer n) bezeichnet.

(a) Eingabe von ENPOP

Falls die Boundstate-Wellenfunktion nicht geplottet werden soll, oder für Streurechnungen ist die gleiche Eingabe wie für ENPON zu machen. Anderenfalls sind folgende Datenkarten zu ändern:

1) 10 3 11 0 0 IFAKD IGAK 0 0 0 IPLO

IPLO = 1 Wellenfunktion wird für $r_i = .1 \text{ fm} * i$ ($i = 1, \dots, 200$) auf TAPE15 geschrieben

IPLO = 2 Wellenfunktion wird zusätzlich ausgedruckt

Nach der Karte JWS NZKA NENTP ... ist das Quadrat der Norm der internen Wellenfunktion einzulesen:

5) SNORM(1,...,NZKA)

(b) Eingabe von VERSEM (Berechnung der Streufunktion)

Wie VESOPD bis auf

1) NBAND2, NBAND3, MZREK, NUMPR, IELMA, IWEFU, IPLO

IELMA.GE.1 und IWEFU.GE.1: Die Entwicklungskoeffizienten der Streufunktion und die a-Matrixelemente werden auf TAPE8 geschrieben

IWEFU.GE.2: Ausdruck der Koeffizienten

IWEFU.GE.3: Ausdruck der Wellenfunktion

IWEFU.GE.1 und IPLO.GE.1: Für das Plotprogramm wird die Wellenfunktion auf TAPE15 geschrieben

Letzte Karte:

GEW, QD, QS

1. 1.5 0.

Parameter zum Ändern des Funktionals
für die Anpassung der Wellenfunktion

(c) Eingabe von OBELMA (reduzierte Spinmatrixelemente der elektromagnetischen Multipoloperatoren)

Wie OBER bis auf Karte

- 2) NREG(1,...,4) 1 = Protonoperator $1I_{\text{Spin}}$
 2 = Neutronoperator $1I_{\text{Spin}}$
 3 = Protonoperator $\underline{S}$
 4 = Neutronoperator $\underline{S}$
 NREG(i) = 1: Operator i wird gerechnet

(d) Eingabe von LUELMA (Vorbereitung der reduzierten Ortsmatrixelemente der elektromagnetischen Operatoren)

Wie LUPO bis auf Karte

- 2) IENT(1,...,4) 1 = Bahnanteil von elektrischem Bahnoperator
 2 = elektrischem Spinoperator
 3 = magnetischem Bahnoperator
 4 = magnetischem Spinoperator
 IENT(i) = 1: Operator i wird gerechnet

- 3) NZF, MUL NZF Anzahl der Zerlegungen
 MUL Multipolarität der Operatoren

(e) Eingabe von QUELMA (reduzierte Ortsmatrixelemente der elektromagnetischen Operatoren, multipliziert mit Spinmatrixelement)

Wie QUAPO bis auf Karte

- 2) LREG(1,...,10) 1 = $O(\mathcal{E}, LM)$ für Protonen
 2 = $O(\mathcal{E}, LM)$ für Neutronen
 3 = $O'(\mathcal{E}, LM)$ für Protonen
 4 = $O'(\mathcal{E}, LM)$ für Neutronen
 5 = $O(\mathcal{M}, LM)$ für Protonen
 6 = $O(\mathcal{M}, LM)$ für Neutronen
 7 = $O'(\mathcal{M}, LM)$ für Protonen
 8 = $O'(\mathcal{M}, LM)$ für Neutronen
 9 = $O_{ST}(\mathcal{E}, LM)$ für Protonen
 10 = $O_{ST}(\mathcal{E}, LM)$ für Neutronen
 LREG(i) = 1: Operator i wird gerechnet

Weglassen der Potentialeingabe.

$\langle K = NZKL + 1, NZKL + NZKR \rangle$ KK, NUMK(1,...,KK) $\langle KEIND \neq 0 \rangle$ NUMK(1,...,KK) LUM(1,...,MM)	$\left. \vphantom{\begin{array}{l} \langle K = NZKL + 1, NZKL + NZKR \rangle \\ KK, NUMK(1,...,KK) \\ \langle KEIND \neq 0 \rangle \\ LUM(1,...,MM) \end{array}} \right\}$	analog für rechte Wellenfunktion
---	--	-------------------------------------

(g) Eingabe von ENELMAS (reduzierte Matrixelemente der elektromagnetischen Operatoren zwischen einem gebundenen Zustand und den Basisfunktionen der Streufunktion)

Die Erklärung der Datenkarten erfolgt analog f); der Streuzustand hat links, der gebundene Zustand rechts im Matrixelement zu stehen.

1) NBAND1, NBAND2, IGAK, KAUSD, KEIND

10 11

2) MREG(1,...,10)

3) GEFAK(1,...,4)

4) ANORMB Norm des gebundenen Zustandes

5) JWSL, JWSR, NPARL, NPARR

6) EB Bindungsenergie des gebundenen Zustandes

7) NZKL, NZKR, NZKPL, NZKPR

Zahl der Kanäle, Zahl der Polynomkanäle links und rechts
 (keine Polynome NZKPL = NZKPR = 0)

8) ... $\langle KEIND \neq 0 \rangle$ KK

UNK(1,...,KK)

$\langle K = 1, NZKL \rangle$ JWERT(1,2,3), NUMPOKA

2 * Spin der Fragmente, 2 * Kanalspin, Nummer des
 Polynomkanals
 (= 0, falls keine
 Polynome)

KK, NUMK(1,...,KK)

$\langle KEIND \neq 0 \rangle$ MUMK(1,...,KK)

LUM(1,...,MM)

$\langle K = NZKL + 1, NZKL + NZKR \rangle$

KK, NUMK(1,...,KK)

$\langle KEIND \neq 0 \rangle$ MUMK(1,...,KK)

LUM(1,...,MM)

(h) Eingabe von ASFAK (Einfangquerschnitt und astrophysikalischer S-Faktor)

- 1) NBAND1, NBAND2, NPRI, NPRIX
 NBAND1 = 10, von ENELMAS
 NBAND2 = 8, von VERSEM
 NPRI, NPRIX $\neq$ 0 Ausdruck
- 2) MREG(1,...,10) wie ENELMAS
- 3) NCHAN Zahl der aufzusummierenden einlaufenden Kanäle
 (im einfachsten Fall = 1)
- 4) SNORM(1,...,NZKL) Interne Norm der Streufunktion
 NZKL Zahl der Kanäle der Streufunktion
- 5) NZAEN, NAD8 NZAEN Anzahl der zu rechnenden Energien
 NAD8 = 0 Energien werden eingelesen
 $\neq$ 0 feste Energieschritte
- 6) $\langle$ NAD8.EQ.0 $\rangle$ EW(1,...,NZAEN) Energien
 $\langle$ NAD8.NE.0 $\rangle$ E1, E2 E1 Anfangsenergie
 E2 Schrittweite

(i) Eingabe von TAU (Polarisierbarkeit; für $i = f : S(\epsilon 1)$, α ;
 für $i \neq f : S(\epsilon 1)$)

- 1) NBAND1, NBAND2, NBAND3, NPRI, LGR
 NBAND1 = 12
 NBAND2 = 13 (dummy für $i = f$)
 NBAND3 = 8 von VERSEM
 NPRI $\neq$ 0: Ausdruck
 LGR = $\begin{cases} 0 & i = f \\ 1 & \text{für } i \neq f \end{cases}$ } von ENELMAS
- 2) MREG(1,...,10) wie ENELMAS
 MREG(1) = ... = MREG(8) = 0
 MREG(9) = MREG(10) = 1
- 3) entfällt
- 4) bis 6) wie ASFAK

(j) Eingabe von LUSE1, QUASE1, ENSE1 (Matrizelemente der Polarisierbarkeit in der Closure Näherung)

Wie LUELMA, QUELMA und ENELMAB bis auf Datenkarte 2) in jedem der drei Programme:

Operator 1: $T(2,q)$

Operator 2: $T(0,0)$

In ENSE1 bedeutet die Karte 5): ENER die Energie der Dipolriesenresonanz.

LITERATURVERZEICHNIS

- Ab 65 M. Abramowitz, I. A. Stegun ,
Handbook of Mathematical Functions, New York, 1965
- Al 75 K. Alder, A. Winther, Electromagnetic Excitation ,
North Holland, Amsterdam, 1975
- Al 84 T. K. Alexander, G. C. Ball, W. N. Lenard, H. Geissel, H.-B. Mak,
Nucl. Phys. A 427, 526 (1984)
- Aj 84 F. Ajzenberg-Selove, Nucl. Phys. A 413, 1 (1984)
- Ar 81 H. Arenhövel, Z. Phys. A 302, 25 (1981)
- Ba 72 A. Bamberger, G. Jansen, B. Povh, D. Schwalm, U. Smilansky,
Nucl. Phys. A 194, 193 (1972)
- Ba 82 a J. N. Bahcall, W. F. Huebner, S. H. Lubow, P. D. Parker,
R. K. Ulrich, Rev. Mod. Phys. 54, 767 (1982)
- Ba 82 b F. C. Barker, Aust. J. Phys. 35, 291 (1982)
- Ba 83 D. Baye, P. Descouvemont, Nucl. Phys. A 407, 77 (1983)
- Be 63 M. Bernheim, G. R. Bishop, Phys. Lett. 5, 270 (1963)
- Bl 52 J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics,
John Wiley & Sons, New York, London, 1952
- Br 62 D. M. Brink, G. R. Satchler, Angular Momentum, Oxford, 1962
- Bu 53 H. Buchholz, Die konfluente hypergeometrische Funktion,
Springer, 1953
- Bu 85 B. Buck, R. A. Baldock, J. A. Rubio, J. Phys. G 11, 611 (1985)
- Ca 83 J. R. Calcaro, B. L. Berman, T. W. Donnelly, Phys. Rev. C 27, 1866 (1983)
- Ch 71 L. S. Chuang, Nucl. Phys. A 174, 399 (1971)
- Cl 68 D. D. Clayton, Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis,
Mc Graw-Hill, New York, 1968
- Da 78 R. Davis Jr.: Proc. of the Brookhaven Solar Neutrino Conference
1, 1 (1978)
- Ed 60 A. R. Edmonds, Angular momentum in Quantum Mechanics, Princeton, 1960
- Eg 80 P. Egelhof, W. Dreves, K.-H. Möbius, E. Steffens, G. Tungate,
P. Zupranski, D. Fick, R. Böttger and F. Roesel,
Phys. Rev. Lett. 44, 1380 (1980)
- Ei 69 F. Eigenbrod, Z. Phys. 228, 337 (1969)

- Ei 71 H. Eikemeier, H. H. Hackenbroich, Nucl. Phys. A 169, 407 (1971)
- Fo 53 L. L. Foldy, Phys. Rev. 92, 178 (1953)
- Gi 83 B. F. Gibson, Nucl. Phys. A 416, 503 c (1984)
- Gr 71 S. Green, Phys. Rev. A 4, 251 (1971)
- Ha 67 H. H. Hackenbroich, Forschungsbericht ZAED K67-93, Frankfurt (1967)
- Ha 70 H. H. Hackenbroich, Z. Phys. 231, 216 (1970)
- Ha 73 H. H. Hackenbroich, Reactions Involving Light Nuclei, in: Proc. Symp. On The Present Status And Novel Development In The Nuclear Many-Body Problem, Rome, Editrice Compositori, Bologna, 1973
- Ha 77 H. H. Hackenbroich, Memorial Volume, Nucl. Phys. A 286, iii-v (1977)
- Hä 73 O. Häusser, A. B. Mc Donald, T. K. Alexander, A. J. Ferguson, R. E. Warner, Nucl. Phys. A 212, 613 (1973)
- He 70 P. Heiss, H. H. Hackenbroich, Z. Phys. 235, 422 (1970)
- He 85 M. Herman, H. M. Hofmann, S. Stocker, Verhandl. DPG (VI) 20, 560 (1985)
- Ho 83 H. M. Hofmann, T. Mertelmeier, W. Zahn, Nucl. Phys. A410, 208 (1983)
- Ho 84 a H. M. Hofmann, Nucl. Phys. A 416, 363 c (1984)
- Ho 84 b H. M. Hofmann, T. Mertelmeier, Die Berechnung von Matrixelementen im Refined Resonating Group Modell, Interner Bericht, Erlangen, 1984
- Ho 84 c H. M. Hofmann, private Mitteilung, 1984
- Ja 74 C. W. Jager, H. de Vries, C. de Vries, Atomic Data and Nuclear Data Tables 14, 479 (1974)
- Ka 84 a T. Kajino, A. Arima, Phys. Rev. Lett. 52, 739 (1984)
- Ka 84 b T. Kajino, private Mitteilung, 1984
- Ka 84 c T. Kajino, INS-RIKEN Intern. Symposium on Heavy Ion Physics, Mt. Fuji, August 1984
- Ki 81 B. T. Kim, T. Izumoto, K. Nagatani, Phys. Rev. C 23, 33 (1981)
- Kr 82 H. Kräwinkel, H. W. Becker, L. Buchmann, J. Görres, K. U. Klettner, W. E. Kieser, R. Santo, P. Schmalbrock, H. P. Trautvetter, A. Vlieks, C. Rolfs, J. W. Hammer, R. E. Azuma, W. S. Rodney, Z. Phys. A 304, 307 (1982)
- La 77 L. D. Landau, E. M. Lifschitz: Klassische Feldtheorie, Berlin, 1977
- Li 81 Q. K. K. Liu, H. Kanada, Y. C. Tang, Phys. Rev. C 23, 645 (1981)
- Ma 79 T. Mayer-Kuckuk, Kernphysik, Teubner, Stuttgart, 1979
- Me 61 A. Messiah: Quantum Mechanics, North Holland, Amsterdam, 1961
- Me 83 B. C. Metsch, private Mitteilung, 1983

- Na 69 K. Nagatani, M. R. Dwarakanath, D. Ashery,
Nucl. Phys. A 128, 325 (1969)
- Ni 71 G. J. C. Van Niftrik, L. Lapikas, H. de Vries, G. Box,
Nucl. Phys. A 174, 173 (1971)
- Nö 76 W. Nörenberg, H. A. Weidenmüller, Introduction to the Theory of
Heavy-Ion Collision, Lecture Notes in Physics 51, Springer,
Berlin, 1976
- Or 75 H. Orth, H. Ackermann, E. W. Otten, Z. Phys. A 273, 221 (1975)
- Os 82 J. L. Osborne, C. A. Barnes, R. W. Kavanagh, R. M. Kremer,
G. J. Mathews, J. L. Zyskind, P. D. Parker, A. J. Haward,
Phys. Rev. Lett. 48, 1664 (1982) und Nucl. Phys. A 419, 115 (1984)
- Pa 63 P. D. Parker, R. W. Kavanagh, Phys. Rev. 131, 2578 (1963)
- Ra 66 R. E. Rand, R. Frosch, M. R. Yearian, Phys. Rev. 144, 859 (1966)
Erratum, Phys. Rev. 148, 1246 (1966)
- Ro 53 M. E. Rose, Elementary Theory of Angular Momentum,
Wiley, New York, 1953
- Ro 67 H. J. Rose, D. M. Brink, Rev. Mod. Phys. 39, 306 (1967)
- Ro 81 R. G. H. Robertson, P. Dyer, R. A. Warner, R. C. Melin, T. J. Bowles,
A. B. Mc Donald, G. C. Ball, W. G. Davies, E. D. Earle,
Phys. Rev. Lett. 47, 1867 (1981)
- Ro 83 R. G. H. Robertson, P. Dyer, T. J. Bowles, R. E. Brown, N. Jarmie,
E. J. Maagiore, Phys. Rev. C 27, 11 (1983)
- Sa 51 R. G. Sachs, N. Austern, Phys. Rev. 81, 705 (1951)
- Sch 84 W. Schott, Diplomarbeit, Erlangen, 1984
- Se 75 T. H. Seligman, Double Coset Decompositions of Finite Groups and
the Many Body Problem, Burg, Basel, 1975
- Si 37 A. J. F. Siegert, Phys. Rev. 52, 787 (1937)
- Sm 72 U. Smilansky, B. Povh, K. Traxel, Phys. Lett. 38 B, 293 (1972)
- St 74 H. Stöwe, H. H. Hackenbroich, Z. Phys. 267, 403 (1974)
- St 77 H. Stöwe, W. Zahn, Nucl. Phys. A 289, 317 (1977)
- Su 84 D. Sundholm, P. Pyykkö, L. Laaksonen, A. J. Sadlej,
Chem. Phys. Lett. 112, 1 (1984)
- Ta 81 Y. C. Tang, Microscopic Description of the Nuclear Cluster Theory
(in Topics in Nuclear Physics), Lecture Notes in Physics, Vol. 145,
Springer, Berlin, 1981
- To 63 T. A. Tombrello, P. D. Parker, Phys. Rev. 131, 2582 (1963)

- Ve 84 W. J. Vermeer, M. T. Esat, M. P. Fewell, R. H. Spear, R. M. Baxter,
S. M. Burnett, Phys. Lett. 138 B, 365 (1984)
- Vo 83 H. Volk, H. Kräwinkel, R. Santo, L. Wallek, Z. Phys. A 310, 91 (1983)
- Wa 83 H. Walliser, Q. K. K. Liu, H. Kanada, Y. C. Tang,
Phys. Rev. C 28, 57 (1983)
- Wa 84 a H. Walliser, H. Kanada, Y. C. Tang, Nucl. Phys. A 419, 133 (1984)
- Wa 84 b H. Walliser, Y. C. Tang, Phys. Lett. 135 B, 344 (1984)
- Wa 85 H. Walliser, private Mitteilung, 1985
- We 81 H. Wendel, Diplomarbeit, Erlangen, 1981
- We 84 a A. Weller, Dissertation, Marburg, 1984
- We 84 b H. R. Weller, P. Colby, N. R. Roberson, D. R. Tilley,
Phys. Rev. Lett. 53, 1325 (1984)
- We 85 A. Weller, P. Egelhof, R. Čaplar, O. Karban, D. Krämer,
K.-H. Möbius, Z. Moroz, K. Rusek, E. Steffens, O. Tungate,
K. Blatt, I. König, D. Fick, eingereicht an Phys. Rev. Lett.
- Wi 77 K. Wildermuth, Y. C. Tang, A Unified Theory of the Nucleus,
Vieweg, Braunschweig, 1977
- Wi 81 R. D. Williams, S. E. Koonin, Phys. Rev. C 23, 2773 (1981)

DANKSAGUNG

Ich danke Herrn Prof. Dr. H. M. Hofmann für die Anregung zu dieser Arbeit, für viele hilfreiche Diskussionen und für sein stetiges Interesse am Fortgang dieser Arbeit.

Den Mitarbeitern des Instituts für Theoretische Physik III in Erlangen, besonders Herrn Dipl. Phys. J. Burger, danke ich für die zahlreichen klärenden Gespräche.

Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. D. Fick für den Hinweis, die Untersuchungen auf die Polarisierbarkeit auszudehnen.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Förderung dieses Projekts.

Außerdem bin ich dem Regionalen Rechenzentrum Erlangen zu Dank verpflichtet für die Kooperation bei den Rechnungen auf den Maschinen CDC Cyber 173 und Cyber 845 und für die Verbindung zum Karlsruher Vektorrechner Cyber 205.

Mein Dank gilt weiterhin Frau B. Kreisel für die Schreibarbeiten und Frau J. Geithner für das Herstellen der Bilder.

LEBENS LAUF

Thomas MERTELMEIER

Geburtstag und -ort: 9. September 1954 in Nürnberg

Eltern: Friedrich Mertelmeier
Luise Mertelmeier geb. Möhring

Schulbildung: Bismarckschule Nürnberg
September 1961 bis Juli 1965
Willstätter-Gymnasium Nürnberg
September 1965 bis Juni 1974
Reifeprüfung am 22. Juni 1974

Grundwehrdienst: 1. Juli 1974 bis 30. September 1975

Studium: Studium der Physik an der Universität Erlangen-Nürnberg seit Wintersemester 1975/76
Diplomprüfung Physik: 18. Mai 1981

Tätigkeiten: Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Theoretische Physik III der Universität Erlangen-Nürnberg
1. 8. 1981 bis 31. 12. 1981
Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Theoretische Physik III der Universität Erlangen-Nürnberg 1.1.1982 bis 31.12.1984
Wissenschaftlicher Angestellter im Fachbereich Physik der Philipps-Universität Marburg seit 1.1.1985

